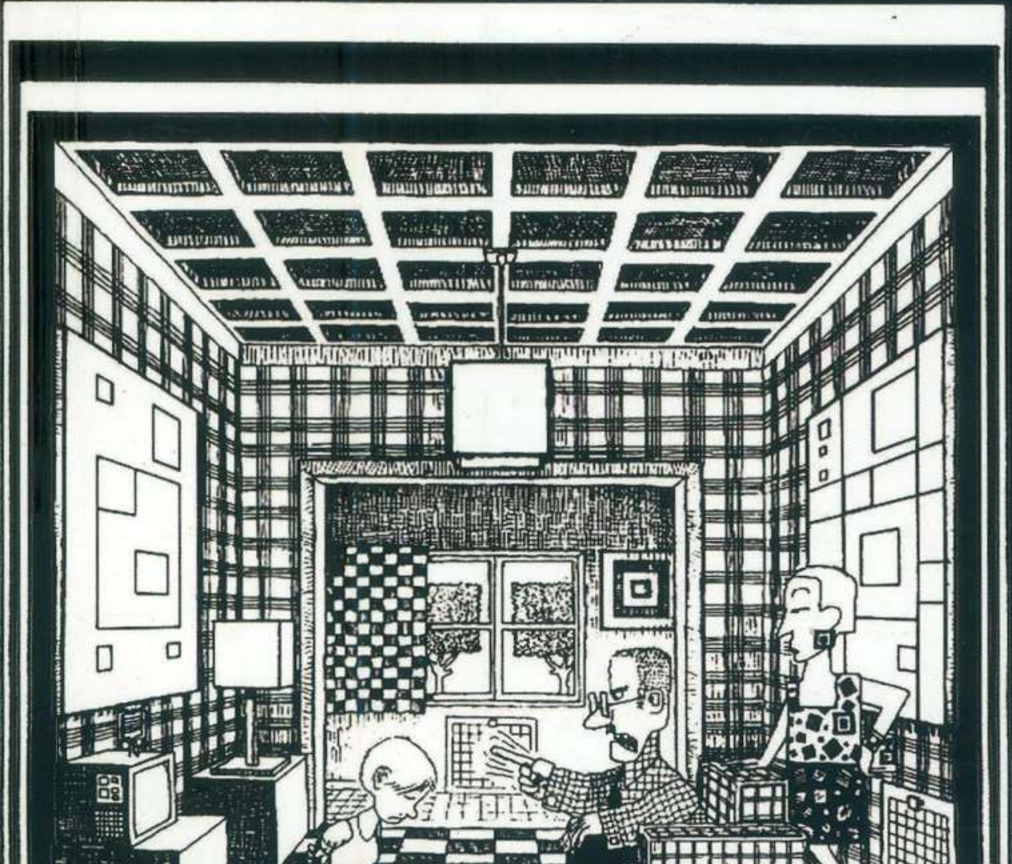
Colección **Moral y Luces / Simón Rodríguez**

Matemática y Realidad

ALÍ RAMÓN ROJAS OLAYA

ARGENIS ALGARA ALGARA



ESTRATEGIAS PARA DOCENTES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Fondo Editorial Ipasme

Matemática y Realidad
Estrategias para docentes de Educación Básica

Alí Ramón Rojas Olaya
y Argenis Arnaldo Algara Algara

MORAL Y LUCES
SIMÓN RODRIGUEZ

Fondo Editorial Ipasme

GIDEM

"Las condiciones están dadas como nunca para el cambio social y la educación será su órgano maestro. Una educación de la cuna hasta la tumba, inconforme y reflexiva, que nos inspire un nuevo modo de pensar y nos incite a descubrir quiénes somos en una sociedad que se quiera más a sí misma. Que aproveche al máximo nuestra creatividad inagotable y conciba una ética-y tal vez una estética- para nuestro afán desaforado y legítimo de superación personal. Que integre las ciencias y las artes a la canasta familiar. Que canalice hacia la vida la inmensa energía creadora que durante siglos hemos despilfarrado en la depredación y la violencia"

Gabriel García Márquez

A nuestra amada prole: Ángel, Dany, Diego Alejandro y Érika Estefanía; a nuestra razón de ser: nuestras/os alumnas/os y a las/os docentes, constructores/as de puentes hacia un mundo mejor.

AGRADECIMIENTOS

Durante la preparación de este trabajo de investigación recibimos la valiosa ayuda de varias personas e instituciones. Es un placer expresar ahora nuestro agradecimiento sincero al Profesor Castor David Mora, por incentivarnos en la problemática y estimularnos a sumergir nuestras capacidades e ideas en una Educación Matemática Realista; al Gidem, por el apoyo al magisterio; a Walter Beyer, Lelis Páez y Martín Andonegui, por el valioso material de análisis de errores; a las profesoras Concepción Ballester, Francisca Álvarez, Glaysar Castro, Cristina Betz, Carmen Vera, Gisela Méndez, María Morán, Marisela Domínguez, Inés Tovar y Margarita Olivares y a los profesores Pedro Alson, Carlos Di Prisco, Arturo Rodríguez, Nelson Merentes, Gerardo Cámera, Carlos Guía, Raimundo Popper, Ramón Bruzual, Ricardo Ríos y Ventura Echandía, todas/os de la Escuela de Matemática de la UCV, por la formación brindada; a la Profesora Ruth Hurtado, amiga de la esperanza y eterna joven luchadora y comprometida, por sus aportes científicos y académicos; al amigo Jorge Trujillo, por su desinteresada ayuda metodológica; a Carolina Barrios, por su esmerada corrección y su valioso aporte informático y de estímulo en el logro de objetivos personales y académicos; al Profesor Carlos Torres por los proyectos matemáticos; a la Profesora Eva Reverand, por su aporte en la teoría del aprendizaje; a Maira Rojas y Marlene Carvajal (léase Preescolar Job Pim), por ese papiro tan valioso; al Profesor Jaime Bances, por la trascripción de parte del trabajo; a Mario Rafael Pérez, por las fotografías de arte matemático; a Marco Antonio

Barrios por las fotografías de Vargas y Antemano; a Ligia Olaya de Rojas y a Aurora Rodríguez de Barrios por alimentar nuestras vidas; a Ramón Rojas, por ese caudal que a veces hace milagros; a todos los que laboran en el Laboratorio de Cómputo Científico de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Central de Venezuela por la ayuda informática; a la Unidad Educativa El Junquito, también conocida como Lic. Gustavo Padrón, de la cual es profesor fundador el educador Argenis Algara, a la Unidad Educativa Felipe Fermín Paúl, a la Escuela Técnica San José Obrero de Antímano, a la Escuela Nacional de Administración y Hacienda Pública, en las cuales se hizo el trabajo de campo; al colega Profesor de Matemática Favio Quijada, Presidente de la Junta Administradora del Ipasme y a la Profesora Sagrario De Lorza, porque creen que un mundo mejor sí es posible; al historiador José Gregorio Linares, Presidente del Fondo Editorial Ipasme, y a su valioso personal, por su gestión para la publicación de este trabajo; al diseñador gráfico Alejandro Rivero, creador de la portada; a la Biblioteca Central de la UCV, a la Biblioteca "Jesús M. Alfaro Zamora" de la Escuela de Educación de la UCV y a su Unidad de Documentación (CENDOC); al Instituto Pedagógico de Caracas y su Biblioteca Central "Pedro Guevara Rojas"; a nuestro maestro Prof. Pedro Felipe Ledezma, visionario y obrero de la educación venezolana, por su guía y estímulo; y finalmente, a todas las investigadoras e investigadores, autoras y autores, de la bibliografía citada y revisada.

Alí Ramón Rojas Olaya y Argenis Arnaldo Algara Algara
Caracas, domingo 30 de noviembre de 2008.

Presentación

El Instituto de Previsión y Asistencia Social del Ministerio del Poder Popular para la Educación (Ipasme) bajo la Presidencia del educador Favio Quijada y el Fondo Editorial Ipasme, el cual tengo el honor de presidir, conscientes de la obligación de publicar obras precisas e impostergables y capaces de esclarecer el significado de los procesos sociales que deciden el curso del mundo actual, ubica seis colecciones en las conciencias de todas y todos quienes ejercen el magisterio, para que en su carácter de agentes multiplicadores de la liberación y la esperanza sean parte de la construcción de un mundo mejor. Las seis colecciones referidas son las siguientes: Moral y Luces: Simón Rodríguez, Pensamiento crítico: Luis Beltrán Prieto Figueroa, Aquiles Nazoa Patacaliente, Los pueblos resisten: Zobeyda “La muñequera”, Somos la vida y la alegría: Livia Gouverneur y Amanecí de bala: Pío Tamayo. Todos los nombres que aparecen involucrados en los títulos de las colecciones representan todas las facetas del magisterio: visionarios pedagogos (Simón Bolívar, Simón Rodríguez, Luis Beltrán Prieto Figueroa), docentes de aula (Pío Tamayo, Argimiro Gabaldón), docentes de la vida (Aquiles Nazoa, Víctor Valera Mora, Zobeyda Jiménez), estudiantes (Livia Gouverneur). Mujeres y hombres que nacieron para ser ejemplos eternos. Mujeres y hombres que dieron sus vidas para que hoy, en esta primogénita década del Siglo XXI, cada venezolana/o asuma su rol sociopolítico en una Venezuela que ahora es de todas y de todos.

La colección *Moral y Luces: Simón Rodríguez* pretende ser un espacio para la difusión de obras pedagógicas y didácticas que faciliten el día a día de quienes ejercen el magisterio. La colección lleva dos nombres. El primero, el del pensamiento síntesis de la visión política y educativa del Libertador Simón Bolívar “Moral y luces son los polos de una república, moral y luces son nuestras primeras necesidades” pronunciado ante el Congreso de Angostura en 1819. El segundo nombre, el del *pedagogo venezolano más importante del Siglo XIX*, quien dijo que "el interés general está clamando por una reforma de la instrucción pública; la América está llamada por las circunstancias a emprenderla... Los hombres no están en el mundo para entredestruirse, sino para entreayudarse". Samuel Robinson ya hablaba de socialismo antes que Marx y luchó afanosamente hasta sus 83 años de edad en la construcción colectiva para romper el cerco de una forma de ver el mundo establecida por el pensamiento colonialista.

Dentro de esta línea editorial se inscribe este libro. Me sorprendí al leer algunos resultados del test de Matemática que aplicaron los autores. Estos datos ameritan interrogarse sobre el peculiar mapa que cada uno/a de nosotros/as (docentes, padres, madres, alumnos/as, sociedad) construyó sobre esta realidad que aunque fue realizada entre 1999 y 2002 no creo que ahora sea diferente. Me pregunto: ¿Fracaso del/a alumno/a o de la escuela? ¿Problema de aprendizaje o problema de enseñanza? ¿Deserción de los/as alumnos/as o expulsión de la escuela? ¿Falta de motivación o ausencia de estrategias que promuevan el interés? ¿Aprender por aprender o aprender significativamente y con sentido? Creo que son muchos los factores que hacen que la Matemática sea uno de los puntos débiles de la escuela. Pero un factor es fundamental: si las/os docentes de esta hermosa ciencia no disfrutan junto a sus alumnas/os la pasión y el amor que sienten al trabajar con ella y no les transmite sus maravillas; no hay forma de contagiarles su belleza. Bruner decía que su maestra de los primeros años de escolaridad, la Srta. Orcutt, con cada pregunta, con cada diálogo, despertaba en las/os alumnos/as un mundo de maravillas. Es lo que las/os profesoras/es deben lograr con cada propuesta áulica en pos de la calidad educativa y es lo que motivó a los profesores Alí Ramón Rojas Olaya y Argenis Arnaldo Algara Algara a emprender esta tarea.

Entre las teorías generales más utilizadas por el magisterio en Venezuela destaca el conductismo (Skinner) como la más estandarizada. Los profesores Rojas Olaya y Algara Algara apuestan por un enfoque realista de la Matemática que se nutre del aprendizaje significativo (Ausubel), los aportes constructivistas (Piaget) y el aprendizaje por descubrimiento (Bruner), teorizando con mayor énfasis en la Educación Matemática Realista de la Escuela Holandesa de Hans Freudenthal. Los autores consideran que la Educación Matemática admite una interpretación integral y dialéctica como disciplina científica y como sistema social interactivo que comprende teoría, desarrollo y práctica.

Todas/os estamos de acuerdo en que el prodigioso desarrollo científico operado en los últimos años sería imposible sin el concurso de la Matemática. Entendemos que gracias a esta disciplina podemos ingresar a Internet y contar con una información que nos llega de todos los rincones del planeta; y que gracias a algo que parece tan teórico como los números primos se han conseguido usar claves abiertas para cifrar un mensaje con más fiabilidad que las clásicas claves cerradas. En *Matemática y Realidad: estrategias para docentes de Educación Básica* los autores estudian el sistema de conocimientos, las instituciones del magisterio donde se hizo el trabajo de campo, los planes de formación y el quehacer pedagógico y didáctico de docentes y discentes y hacen una propuesta para el desarrollo de una praxis más acorde con los períodos de transformación que vive nuestro país en este Siglo XXI. Los autores están claros que la Educación Matemática conforma una actividad social compleja y diversificada. La Didáctica de la Matemática la describen estos autores como la disciplina que estudia e investiga los problemas que surgen en educación matemática. Estamos convencidos que este libro será de gran ayuda en las manos de las/os docentes venezolanas/os.

Venezuela protagoniza en rol estelar ese mundo en formación, de allí la importancia de transformar con la acción y la palabra las realidades educativas conservadoras mostrando mediante distintas perspectivas el papel que cumple el currículo, la pedagogía, la didáctica y la evaluación en el desarrollo de profundos cambios de concientización social y política. Prueba de ello es este libro, el primero de la colección *Moral y luces: Simón Rodríguez*, con el cual se inicia una nueva etapa en el Fondo Editorial Ipasme: la de la socialización de la lectura a través de la promoción de ésta.

José Gregorio Linares
Presidente del Fondo Editorial Ipasme
Caracas, sábado 28 de febrero de 2009

Prólogo

El presente libro muestra, desde el punto de vista teórico y práctico, la relación entre la Matemática y la realidad, no solamente desde la perspectiva didáctica y pedagógica, sino además desde el campo de las aplicaciones y el significado profundo que tiene la Matemática para comprender y transformar el mundo, especialmente aspectos relacionados con el mundo social y natural. Los autores de este importante trabajo se han esforzado, científica, pedagógica y ejemplarmente, en mostrar ante la comunidad nacional e internacional la existencia de una estrecha y marcada relación entre Matemática y realidad, ésta puede ser vista y recreada desde diversos ángulos, particularmente a partir de una mirada educativa; es decir, en relación con el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza, tal como se puede ver en cada uno de los ejemplos desarrollados en el trabajo y el conjunto de actividades desarrolladas a lo largo de la investigación.

Cuando los profesores Alí Ramón Rojas Olaya y Argenis Arnaldo Algara Algara hablan del concepto sobre Matemática y realidad, nos motivan a pensar con cierta frecuencia en aquella Matemática orientada fundamentalmente en situaciones, hechos y fenómenos inherentes o estrechamente vinculados con la cotidianidad. Dicha interpretación, dicen los autores, se fundamenta en una concepción que, aunque tiene como referente a la realidad o aspectos importantes de ésta, no siempre la forma de ver y trabajar esa realidad en el currículo, la escuela, el aula y otros lugares de aprendizaje y enseñanza es la más apropiada. La educación y, especialmente, las prácticas educativas concretas, en opinión de los autores de este libro, tienen la obligación ineludible de formar, socializar, transformar de manera crítica, política y reflexiva a cada uno/as de los/as ciudadanos/as, siempre en correspondencia con el contexto concreto y abstracto, con sus mundos y con la realidad.

Si la Matemática permite adentrarse en la comprensión y transformación del mundo, resulta obvio para los autores que la educación matemática no debe estar separada de su relación con la realidad; lo cual obliga a los/as docentes de cualquier ámbito educativo tratarla didáctica y pedagógicamente a partir de un enfoque realista. La realidad y la Matemática son inseparables, no solamente en los denominados tiempos modernos, sino durante la existencia del ser humano en este planeta y su necesidad de responder interrogantes básicas de las relaciones entre los sujetos de un determinado grupo cultural o las características propias de los fenómenos naturales cambiantes temporal y contextualmente. Por ello y de manera natural, podríamos señalar que la Matemática ha permitido que los seres humanos encuentren soluciones a situaciones socio-naturales complejas, pero altamente significativas paras sus vidas y para las diversas relaciones de poder entre sujetos o grupos de sujetos. La Matemática, en consecuencia, ha contribuido considerablemente para que las personas en cualquier parte del mundo puedan entender, interpretar y transformar sus propias realidades, especialmente aquéllas directamente vinculadas con su entorno.

Por ello, consideramos que la presente investigación tiene una doble finalidad; por una parte, tiene que ver con la realización de un estudio profundo sobre la relación entre matemática y realidad, para lo cual los autores han recurrido a la revisión bibliográfica y la reflexión teórica. En segundo lugar, los autores han propuesto también un conjunto muy importante de ejemplos e ideas que aún y lamentablemente no están presentes en el currículo planificado e implementado en cada uno de los centros educativos, aunque obviamente existen importantes avances en el campo del desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza basados en la investigación, cotidianidad, participación, cooperación y colaboración, siempre mediante la incorporación de hechos y fenómenos realistas a los procesos de aprendizaje y enseñanza.

Rojas Olaya y Algara Algara explican que en la finalización de la primera década del siglo XXI, pareciera no existir separación entre el contexto y el momento histórico cuando el gran matemático de pedagogo Hans Freudenthal (1967) decía, entre otras cosas de alto valor filosófico, matemático y educativo, lo siguiente: "las posibilidades de aplicación de la matemática han crecido continuamente, sin embargo, apenas 1 por 100 de los bachilleres que aprendía matemática a principios de este siglo han hecho uso de ella". Además, la National Council of Teachers of Mathematics (1989) ha emitido lineamientos para la instrucción en matemática con énfasis en el desarrollo del poder matemático de los/as estudiantes, lo cual debería manifestarse en habilidades y destrezas para la explorar, conjeturar, razonar lógicamente, usar diversos modelos matemáticos, buscar variados caminos de solución a los problemas matemáticos internos y externos a la disciplina, etc. La intención de desarrollar la agudeza matemática, ver su utilidad y reconocer importancia desde el punto de vista utilitario y abstracto, tiene su reconocimiento de que la Matemática más que una colección de ideas, términos, definiciones, conceptos y relaciones, constituye un conjunto de aspectos sumamente importantes de estrategias, modelos y herramientas para investigar y resolver problemas del mundo real cotidiano y abstracto.

Durante los últimos años hemos presenciado, en el campo de la educación matemática, un aumento considerable de criterios teóricos y propuestas concretas para el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza de la Matemática en los diferentes niveles de los respectivos sistemas educativos. Estos puntos de vista están enfocados fundamentalmente en dos direcciones. Por una parte, se cuestiona abiertamente el tratamiento que se le ha venido dando, dentro y fuera de las instituciones educativas, a las matemáticas denominadas escolares; es decir, las matemáticas correspondientes a los planes de estudio desde los primeros grados de la educación básica obligatoria hasta los primeros cuatro semestres de las diferentes disciplinas que se estudian en las instituciones de educación superior, independientemente de la cantidad de contenidos matemáticos presentes en los respectivos programas. Algunos puntos de vista sobre el particular se pueden observar en el trabajo coordinado por Gorgorió, Deulofeu y Bishop (2000).

Paralelamente a esta crítica surge un conjunto de propuestas, desde el punto de vista metodológico, que sugieren el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza de la Matemática de acuerdo con diferentes corrientes didácticas, pedagógicas, psicológicas y antropológicas; muchas de ellas ampliamente discutidas durante buena parte del siglo pasado (Kilpatrick, 1994). En segundo lugar, y estrechamente vinculado con los aspectos metodológicos propios del aprendizaje y la enseñanza de la Matemática, los autores proponen un cambio profundo de los tópicos correspondientes a la Matemática escolar, que se han de enseñar de acuerdo con los objetivos de una educación matemática dirigida hacia la mayoría de la educación tal como han insistido Keitel (1985 y 1989) y Damerow (1986), dentro de lo que se ha denominado “alfabetización matemática” (D´Ambrosio, 1980, 1985 y 1994; Skovsmose, 1999). Es decir, Rojas Olaya y Algara Algara nos colocan en presencia de tres aspectos directamente relacionados entre sí, los cuales influirían en el futuro inmediato sobre una nueva dimensión para la educación matemática, sus objetivos fundamentales, las correspondientes estrategias para su aprendizaje y enseñanza y, muy especialmente, los tópicos matemáticos que conformarían los planes de estudio. Obviamente estos elementos determinan, en última instancia, los demás aspectos que conforman el currículo; es decir, la formación de los/as docentes y la evaluación de los aprendizajes matemáticos como parte integral del proceso educativo. (Treffers, 1987; Romberg, 1992; Rico Romero, 1997).

Dentro de las críticas que se hacen en relación con las dificultades que presentan los/as estudiantes con la Matemática, los autores del libro *Matemática y realidad: estrategias para docentes de Educación Básica* mencionan las afirmaciones, prácticamente generalizadas, que señalan que existe un alta la incompetencia en los/as estudiantes para hacer un uso adecuado de los conocimientos matemáticos adquiridos durante su formación general básica. Entre las competencias que deberían lograr los/as estudiantes los autores mencionan las siguientes: a)

Pensar matemáticamente; b) Argumentar matemáticamente; c) Modelar matemáticamente; d) Plantear y resolver problemas; e) Representar y usar informaciones mediante herramientas matemáticas; f) Desenvolverse adecuadamente con la ayuda de fórmulas, simbologías, y elementos técnicos; g) Usar con mayor frecuencia los conocimientos matemáticos como ayuda para la comunicación; h) Hacer uso de la Matemática como medio de ayuda para el trabajo profesional y cotidiano; y i) Cultivar el conocimiento matemático como parte fundamental de la herencia cultural del ser humano. Estas categorías se han fortalecido con los dos últimos estudios internacionales sobre matemática, lenguaje y ciencias naturales, conocidos como el TIMSS (Third International Mathematics Science Study) y el PISA (Programme for International Student Assessment).

Esta situación de rechazo y aversión hacia la Matemática se complica cuando los/as estudiantes de cualquier nivel del sistema educativo tienen que hacer uso de informaciones y conocimientos matemáticos básicos para vincular adecuadamente las matemáticas escolares con la diversidad de problemas y fenómenos del mundo natural y social (Freudenthal, 1973; Heymann, 1996). Estas afirmaciones las podemos encontrar no solamente en los resultados de muchos estudios comparativos internacionales como los ya mencionados anteriormente, sino también en diferentes investigaciones realizadas en varias partes del mundo por investigadores individuales, grupos de investigación vinculados en su mayoría a Universidades y, muy recientemente, por los mismos gobiernos quienes están interesados, por muchas razones, en conocer la realidad sobre sus sistemas educativos. Si analizamos trabajos como los de Meadows, Meadows y Pander (1992) observamos que realmente existe poca conciencia en la población, podríamos señalar en la mayor parte de los países, sobre la importancia que tiene la Matemática en cuanto a la comprensión del mundo en sus múltiples características y la solución de problemas de índole social, económico, técnico y ambiental. Estos y muchos otros autores señalan, por ejemplo, que es necesario mostrarle a la población estudiantil, especialmente, temas matemáticos concretos que estén relacionados con la realidad, como por ejemplo las ideas matemáticas sobre crecimiento y función exponencial con respecto a la explosión demográfica. Si los estudiantes trabajaran, durante su formación básica en Matemática, estos y otros conceptos afines, se podría crear conciencia en cuanto a que el crecimiento poblacional no responde a una función lineal, tal como lo piensan muchas personas, incluso profesionales.

Algunos autores e investigadores que trabajan dentro de esta perspectiva de la Matemática y realidad, tales como los discípulos de Hans Freudenthal en el Instituto Holandés sobre

Educación Matemática (De Lange, Ed de Moor y Adri Treffers, entre otros) y mis discípulos (Carlos Torres y Alí Ramón Rojas Olaya, miembros del Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática Gidem y profesores del Instituto Pedagógico de Caracas) insisten en la necesidad de que los/as estudiantes adquieran experiencias básicas adecuadas sobre métodos de trabajo y conceptos matemáticos fundamentales de los diferentes tópicos establecidos en los planes de estudio, con lo cual ellos pueden trabajar un conjunto de actividades y tareas fuera y dentro de la Matemática (Mora, 2002a y 2002b y 2004; Franke 1996, Treffers, 1987). Aquí es muy importante mencionar las pocas experiencias que tienen los/as estudiantes con actividades externas a la Matemática, las cuales requieren de un proceso de modelación matemática tal como lo han establecido muchos autores (Heymann 1996 y Blum, y Niss, 1991) y muy especialmente el estudio PISA. Autores como Blum (1993) y Skovsmose (1999) han insistido durante muchos años en la necesidad de impulsar una educación matemática, en todos los niveles del sistema educativo, dentro de la perspectiva de Hans Freudenthal, ampliamente conocida como la relación entre Matemática y realidad, la cual según Treffers (1987) podría considerarse como la cuarta corriente, después del mecanicismo, el estructuralismo y el empirismo, para la educación matemática actual y futura. Nos atreveríamos a señalar que es necesario, además, fortalecer considerablemente esta corriente con la ayuda de los adelantos teóricos y los trabajos de investigación que se han realizado últimamente en las disciplinas más cercanas a la educación matemática, la pedagogía, la psicología, la informática, la didáctica y la antropología. Es necesario señalar que la pedagogía crítica, la psicología del aprendizaje sociocultural, la cognición situada, la teoría de la actividad y la neurodidáctica constituyen los referentes teóricos de esta última corriente.

La concepción de una educación matemática crítica y realista (EMCR) pretende ir más allá de las simples aplicaciones de los conceptos matemáticos genéricos a situaciones reales. Ella trata, mucho más, del desarrollo de una metodología para el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática de manera compleja y completa, lo cual no significa que sea difícil y complicada; por el contrario, parece ser que se obtienen, desde el punto de vista del desarrollo de competencias, resultados altamente satisfactorios (Bishop, 1999; Skovsmose, 1999; Mora, 2004; Reverand, 2003). Es por ello que, dentro de los tres modelos predominantes actualmente para el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza de la Matemática en la mayoría de los países según nuestras propias observaciones y los estudios internacionales antes mencionados, el que está relacionado directamente con el concepto de una educación matemática crítica y realista es el tratamiento de la educación matemática basada en la modelación y la investigación (Mora, 2004). Esta filosofía para la educación matemática tiene sus bases teóricas en el pensamiento pedagógico de Simón Rodríguez (Rojas Olaya, 2008a), en la pedagogía crítica (Freire, 1973, 1979 y 1996), la educación matemática crítica (Skovsmose, 1999), el aprendizaje basado en la indagación e investigación (Stenhouse, 1987) y la psicología sociocultural (Reverand, 2003).

Es importante recordar que Felix Klein, hace más de un siglo, con sus planes de reforma para la educación matemática, señalaba la necesidad de enfocar y orientar las matemáticas escolares desde el punto de vista de su relación con la realidad. Por muchas razones históricas, didácticas y pedagógicas, es realmente a partir de 1970 cuando se inicia un proceso de reflexión muy profundo, impulsado por otro gran educador matemático como lo fue Hans Freudenthal. A pesar de que existe en la literatura una gran cantidad de trabajos y muchas propuestas concretas sobre esta corriente para la educación matemática, las mismas se mantienen aún en un marco especialmente teórico. Cuando observamos las clases de Matemática y mantenemos entrevistas con docentes de esta disciplina podemos constatar el predominio de la visión estructuralista y mecanicista de la educación matemática.

Sin embargo, los autores de este libro perciben en sus indagaciones, además, que hay mucho interés por la implementación de una educación matemática realista en los diferentes niveles de nuestros sistemas educativos. Los autores y otros miembros del Gidem han elaborado y experimentado en cierta forma unidades de enseñanza dentro de esta perspectiva, las cuales debemos rescatar y tomar en cuenta, desde el paradigma de la investigación acción, para sistematizar y formalizar los cambios curriculares propuestos genéricamente en el marco de las reformas educativas que se han venido desarrollando durante los últimos diez años en nuestros países. Algunas líneas de acción para este proceso de sistematización didáctica podrían ser las siguientes:

a) Discusión y elaboración de un concepto epistemológico bien fundamentado teóricamente sobre la Matemática y la educación matemática realista y crítica. Para ello podríamos tomar, entre otros autores, como referencias importantes los trabajos de Skovsmose (1999), Mellin-Olsen (1987); Bishop (1999); Freudenthal (1983) y Gorgorió, Deulofeu y Bishop (2000).

b) Planificación, implementación y desarrollo de un proceso de investigación acción participativa con la finalidad de determinar y establecer, por una parte, la realidad de la educación matemática y, en segundo lugar, tomar en cuenta las experiencias concretas, los puntos de vista y las necesidades de los/as docentes/as que trabajan en los diferentes niveles del sistema educativo. Este trabajo lo hemos venido desarrollando en colaboración con educadores e investigadores en el campo de la educación matemática de algunos países; entre ellos están actualmente Alemania, Bolivia, Brasil y Venezuela. Consideramos que sería muy importante incorporar a otros países que podrían estar interesados en estas propuestas de transformación curricular.

c) Implementación, también con un carácter investigativo, de algunas ideas concretas que hemos venido desarrollando desde hace algunos años en cooperación con educadores e investigadores matemáticos en todos los grados a partir de la segunda etapa de la Educación Básica hasta los primeros semestres de las diferentes disciplinas correspondientes a la educación superior. Esta iniciativa podría brindarnos la posibilidad de analizar las ventajas y desventajas de la transformación curricular de la educación matemática dentro de la perspectiva de la educación realita y crítica de las matemáticas escolares.

Estas tres ideas, como puede observarse, establecen una estrecha relación entre las reflexiones teóricas sobre el futuro de la educación matemática y los cambios, siempre basados en la investigación acción participativa (Fals Borda, 1992; Mora, 2008 y Rojas Olaya, 2008b), que se van experimentando en la práctica concreta durante el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza de la Matemática. Consideramos que existe mucha información, lamentablemente dispersa, sobre estos enfoques didácticos y pedagógicos para la educación matemática, lo cual requiere una profunda revisión de tales trabajos y, muy particularmente, una organización y sistematización de acuerdo con los adelantos de las metodologías sobre la estructuración y el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza, no solamente de la Matemática.

Esta sistematización teórica tiene que tomar en cuenta, obviamente, algunos trabajos muy importantes que se han realizado sobre el tema. Kaiser-Messmer (1986), por ejemplo, en un intento por sintetizar y organizar, en el mundo de habla alemana, la concepción de la matemática realista nos señala que existen algunas dificultades, observadas y analizadas en los materiales, especialmente en los libros de texto, que enfocan la educación matemática dentro de esta perspectiva didáctica. Estas situaciones problemáticas, según esta educadora, podrían sintetizarse en cuatro aspectos fundamentales:

a) Disfrazamiento de problemas matemáticos mediante un lenguaje de la vida cotidiana o envuelto en términos propios de otras disciplinas científicas. Este tipo de problemas se encuentra con mayor frecuencia en los libros de texto usados por los/as docentes y los/as estudiantes para el aprendizaje la enseñanza de la Matemática.

b) Introducción y visualización de algunos conceptos matemáticos con la ayuda de terminologías propias de la realidad, lo cual tiene la intencionalidad de mostrar la importancia de los conceptos matemáticos estudiados, lo cual podría contribuir con la motivación de los estudiantes para un adecuado aprendizaje de la Matemática. Estas actividades se observan con mayor frecuencia durante el desarrollo de las clases de Matemática, sobre todo en la introducción de temas como números enteros, ecuaciones y en algunos casos funciones.

c) Aplicación de procedimientos matemáticos estandarizados. Esto significa la aplicación de algoritmos ya conocidos y tratados en clases para la solución de problemas que supuestamente están relacionados con la realidad. Esta es la forma más frecuente de incorporar la realidad en las clases de Matemática, aunque se percibe con frecuencia que esta metodología presenta algunas dificultades en cuanto al tiempo y la complejidad de los problemas planteados. Si los estudiantes no han participado directamente en el proceso de modelación matemática y con ello la elaboración de los respectivos conceptos matemáticos, ocurre con frecuencia que los estudiantes no pueden transferir adecuadamente los procedimientos y conceptos matemáticos a situaciones complejas propias de la realidad, especialmente cuando se exige el desarrollo de un proceso de modelación matemática.

d) La cuarta categoría, y seguramente la más importante, está referida al proceso de elaboración de modelos propiamente dichos. Aquí estamos en presencia del tratamiento didáctico, pedagógico, psicológico y metodológico de la Matemática escolares dentro de la concepción de la educación matemática conocida como matemática y realidad. Esta corriente ha adquirido, teóricamente hablando, una importancia fundamental en el campo de la didáctica de la Matemática durante las últimas tres décadas, lo cual está aún en proceso de reflexión, actualización y verificación práctica.

Por supuesto que dentro de esta última corriente el modelo adecuado para el trabajo de la Matemática, está centrado en la investigación, indagación y acción. Esto significa que los/as estudiantes y docentes deberán estar en constante actualización para enfocar el proceso de aprendizaje y enseñanza, no solamente de la Matemática, de acuerdo con los problemas permanentes presentes en el mundo económico, social, cultural, político, tecnológico y científico. Los temas generadores para el proceso de aprendizaje y enseñanza serían aquellos de mayor actualidad en cada uno de los países, regiones y comunidades, siendo las fuentes primarias de información, por ejemplo, los medios de comunicación, los cuales reflejan la realidad, más aún en la actualidad con el flujo permanente de información.

Desde el punto de vista didáctico, los teóricos y prácticos de la educación matemática han venido elaborando un modelo, ampliamente conocido en el mundo de los educadores matemáticos. Éste seguramente permitirá el trabajo, dentro y fuera de las instituciones escolares, de una variedad muy grande de conceptos matemáticos, no solamente los correspondientes a la educación secundaria, sino también en la escuela primaria.

Consideramos en consecuencia que es muy importante trabajar la educación matemática según esta corriente filosófica, epistemológica, pedagógica y didáctica, ya que ella responde realmente a los principios de una educación matemática en función de la formación general básica de toda la población. La importancia del desarrollo de los conceptos matemáticos en relación con el trabajo de actividades de aprendizaje interesantes y significativamente relevantes para los/as estudiantes y la sociedad en general, podría constituir el elemento central de los cambios curriculares que exigen las respectivas reformas educativas. Las tres primeras características observadas por Kaiser-Messmer (1986, 1997 y 1999), en sus trabajos de investigación, no constituyen realmente un camino adecuado para enfocar la educación matemática. Ellas no corresponden, además, a los principios de la educación *realista y critica de la Matemática.*

Es muy importante señalar, aunque sea brevemente, que el tratamiento de la educación matemática dentro de esta corriente didáctica, cumple con algunos principios fundamentales de la pedagogía, la didáctica, la psicología del aprendizaje y la Matemática como objeto y esencia de la educación matemática (Mora, 2002b, 103 y 104). Entre ellos están los siguientes:

- Objetivos de contenido (materia): referentes a la realidad y al campo de la experiencia como puntos de partida para el proceso de aprendizaje, ejemplificación y visualización de términos y métodos matemáticos, ejercitación de métodos y contenidos matemáticos, fomento de una larga retención de los contenidos matemáticos.

- Objetivos pedagógicos: La enseñanza de la matemática ha de contribuir a la formación de un/a ciudadano/a crítico/a y participativo/a en la solución de los problemas que afectan a su sociedad y a su ambiente.

- Objetivos de utilidad: Desarrollar habilidades para que los/as ciudadanos/as se relacionen adecuada y responsablemente con el ambiente. Transmitirle a los/as alumnos/as habilidades y destrezas para la elaboración e implementación de procesos de modelación en la solución de problemas no necesariamente matemáticos. Transmisión de una adecuada y constructiva imagen de la relación e interdependencia entre la matemática y la realidad.

- Objetivos psicológicos: Aumento de la motivación y mejoramiento de la actitud hacia y para el cultivo de la Matemática.
- Objetivos orientados hacia la ciencia: Con la ayuda de la orientación en las aplicaciones para la educación matemática se ha de buscar que los/as alumnos/as se hagan una imagen de la matemática como ciencia más realista, entendida como un espectro multifacético que ha sido desarrollada históricamente con una connotación científica. Esto significa, indagar para ir obteniendo respuestas a interrogantes dentro de la misma matemática o a problemas planteados fuera de ella, los cuales en su mayoría requieren de su ayuda.
- Objetivos sociales: Los/as alumnos/as tienen que formarse una idea clara y precisa en torno a la reflexiones que se pueden hacer en el tratamiento de problemas dentro y fuera de la matemática como significado histórico y actual de la matemática para la sociedad.

El presente trabajo toma en consideración cada uno de estos elementos fundamentales. Él consta de seis grandes capítulos. El primero contiene el marco introductorio, en el cual se incluye, los objetivos del estudio y su justificación. El segundo capítulo trata del marco teórico, en el cual se profundiza sobre la relación entre Matemática y realidad desde una perspectiva histórica. En este capítulo también se trabaja el concepto de aplicaciones y la resolución de problemas. El tercer capítulo comprende el marco metodológico de la investigación, en el cual se describe el diseño y las características fundamentales de la investigación; en él se trabaja el tema de la selección de las muestras, el instrumentario para la recolección de la información y, por supuesto, la manera cómo será analizada la data lograda a partir del trabajo de experimentación didáctica. En el cuarto capítulo se hace el análisis de toda la información recopilada durante el proceso de la investigación empírica. En este mismo capítulo se hace un análisis de ocho libros de texto de Matemática usados frecuentemente por docentes y estudiantes en los respectivos grados estudiados en esta investigación. El quinto capítulo, tal vez el más importante, se sugiere cómo debería ser una clase de Matemática tomando en cuenta su relación con la realidad; para ello se ha hecho uso del método por proyectos, tomando en cuenta problemas cotidianos e ideas fundamentales, así como lo propone Bruner (1963). La estrategia didáctica-pedagógica puesta en marcha tiene que ver con la idea fundamental basada en los Dominios o Temas Generadores de Aprendizaje y Enseñanza, lo cual hemos trabajado en varias oportunidades teórica y prácticamente. Por último se tiene el sexto capítulo, en el cual los autores intentan la elaboración de un conjunto de conclusiones y recomendaciones con la finalidad básica de contribuir al mejoramiento del proceso de aprendizaje y enseñanza de la Matemática en la República Bolivariana de Venezuela. Es muy importante resaltar que a lo largo del presente trabajo se percibe un conjunto importante de ejemplos concretos, los cuales sirven de referencia importante para que los/as docentes, a quienes va dirigido básicamente este libro, puedan desarrollar diversas actividades de aprendizaje y enseñanza desde la perspectiva de la relación entre Matemática y realidad.

Dr. Castor David Mora

Director Ejecutivo

Instituto Internacional de Investigación Educativa para la Integración

Convenio Andrés Bello

La Paz, Bolivia, domingo 7 de diciembre de 2008.

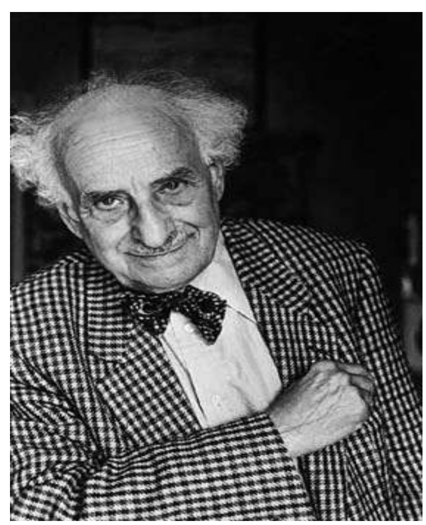
Introducción

Cuando se habla de Matemática y realidad frecuentemente se piensa en una Matemática centrada en hechos y situaciones de la vida diaria. Dicha interpretación se fundamenta en una determinada concepción que, aunque tiene como referente a la realidad o aspectos de ésta, no siempre la forma de integrar esta realidad en la escuela o el aula resulta ser la correcta. La escuela tiene la ineludible obligación de procurar formar ciudadanas críticas, reflexivas, ciudadanos críticos, reflexivos, competentes socialmente y felices, y por ello debe tratar de que las personas logren integrarse y conozcan su realidad y entorno.

Si la Matemática permite adentrarse en la comprensión del mundo, es obvio que no tiene sentido darle un enfoque alejado de la realidad. Realidad y Matemática son inseparables para dar pleno sentido al objetivo último de la enseñanza de esa ciencia el cual es estimular en la alumna y en el alumno la creación de un pensamiento matemático que le ayude a entender, interpretar y desenvolverse en su entorno.

La finalidad de este libro es hacer un estudio de la relación entre la Matemática y la realidad, proponiendo paradigmas que divergen respecto a los establecidos en los programas de estudios vigentes y en textos de consulta, los cuales están apartados del mundo cotidiano.

En los inicios del siglo XXI pareciera no haber distancia con lo que asevera Freudenthal (1967) "Las posibilidades de aplicación de la Matemática han crecido continuamente, sin embargo, apenas 1 por 100 de los bachilleres que aprendían Matemática al principio de este siglo han hecho uso de ella". Además, la National Council of Teachers of Mathematics (1989) ha emitido lineamientos para la instrucción en Matemática queenfatizan el desarrollo del poder matemático de las y los estudiantes para explorar, conjeturar, razonar en forma lógica y usar una



Hans Freudenthal (1905-1990).Fuente: www.fi.uu.nl/images/medewerk variedad de modelos matemáticos para solucionar problemas no rutinarios. La idea de desarrollar la agudeza matemática se basa en el reconocimiento de que la Matemática más que una colección de conceptos y habilidades a ser dominados, es un conjunto en el cual se incluyen métodos para investigar y razonar acerca de situaciones reales.

En el presente trabajo se incluyeron seis capítulos. El capítulo 1 trata la problemática de la enseñanza de la Matemática en la Educación Básica venezolana. Contiene la razón de ser de este libro, los propósitos y la justificación de la investigación llevada a cabo entre 1999 y 2002. El capítulo 2 toca algunos aspectos teóricos que escudriñan la relación entre Matemática y realidad a través de la historia, sus aplicaciones en la enseñanza de la Matemática y la resolución de problemas. El capítulo 3 abarca aspectos metodológicos. Se describe el diseño y tipo de investigación, la muestra de estudio y los instrumentos de recolección de información. En el capítulo 4 se analizan los resultados de la prueba aplicada a las y los alumnos de la muestra en asociación directa con los contenidos del Programa de Estudio vigente de Educación Básica y además con ocho textos utilizados frecuentemente en el sistema educativo. En el capítulo 5 se sugiere cómo debe ser una clase de Matemática utilizando el método de proyectos en el cual a través de la resolución de problemas cotidianos alrededor del desarrollo de una idea fundamental (Bruner, 1963) surgen los temas contenidos en el programa de estudio, pero no según una perspectiva estructuralista prevaleciente, sino más bien en una forma constructivista. Por último está el capítulo 6 en el cual los autores describen los momentos conclusivos y hacen algunas recomendaciones que creen necesarias para mejorar el proceso de aprendizaje y de enseñanza de la Matemática en Venezuela.

Capítulo 1: Problemática de la enseñanza de la Matemática

> "La enseñanza de la Matemática, al menos en nuestro medio, permanece todavía con frecuencia limitada a viejas e ineficientes rutinas, muy mecánicas y simples en los primeros grados, e igual de mecánicas pero artificiosamente oscuras y complejas en el nivel medio. Hace falta salir de esta trampa"
>
> (Lacueva, 2003)

1.1.- ¿Por qué la Matemática?

Para la elaboración del contenido de este libro se hizo una revisión crítica de la forma de enseñar la Matemática hasta el noveno grado de la Educación Básica proponiendo una metodología para enseñar dicha asignatura, distinta a la acostumbrada, introduciendo el método de proyectos, a través del cual se forme en la alumna y en el alumno un pensamiento matemático que le ayude a entender, interpretar y desenvolverse en su entorno y en la vida.

Desde el inicio de la Educación Básica las alumnas y los alumnos afrontan la Matemática. De la misma manera, se observa que muchas alumnas y muchos alumnos se preguntan durante el transcurso de sus años de estudio ¿por qué debo estudiar Matemática?, ¿para qué sirve? De hecho, para muchas alumnas y muchos alumnos la Matemática es la encarnación del aprendizaje incomprendido (Werner, 1996). También se ven con frecuencia situaciones que se presentan a las y los estudiantes en sus vivencias cotidianas que tienen relación directa con la Matemática.

Hay quienes piensan que la Matemática se usa muy poco; pero contrariamente a esa creencia, ella no solamente es utilizada en forma cotidiana, sino también en forma automática y sin darse cuenta de ello.

Se considera que los conocimientos matemáticos se aplican a situaciones simples, como por ejemplo, al ir al supermercado y pagar la mercancía; al adquirir una pieza de tela según la cantidad de metros que necesitamos, al calcular la distancia y el tiempo para llegar a un lugar determinado; al interpretar las coordenadas de mapas o globos terráqueos; al administrar el dinero según el presupuesto mensual. Así mismo se utiliza en situaciones más complejas. Los ingenieros las utilizan para hacer cálculos que determinan la intensidad de la corriente eléctrica, la construcción de viviendas, fabricación de vías de comunicación, entre otros.

La investigación contenida en este libro tiene como propósito contribuir con el mejoramiento de la enseñanza de la Matemática desde la perspectiva de una Matemática realista, con la finalidad de mejorar la formación de recursos humanos capaces de interpretar y resolver situaciones cotidianas apelando a esa ciencia. Para lograr este propósito es importante: **averiguar** si las alumnas y los alumnos usan Matemática para resolver problemas cotidianos; **descubrir,** en caso de que la usen, ¿cuál es esa Matemática? e i**ndagar** si esa Matemática usada coincide o diverge con teorías de la enseñanza vigentes.

Al examinar los ocho libros de texto de Matemática se percibe que estos tratan de enfocar la Matemática tomando en cuenta los conocimientos de la alumna y el alumno y el entorno de ésta y éste (familia, escuela, comunidad) pero sin lograr tal enfoque. Esta tendencia se considera muy importante para el desarrollo de la enseñanza de la Matemática. Desde este punto de vista es necesario relacionar la Matemática con las experiencias o vivencias cotidianas, por ejemplo, vincular la geometría con los objetos que se encuentren en los hogares; la aritmética (números) con el acto de comprar la merienda en la cantina y así sucesivamente con otras situaciones diarias así como "relacionarlas con otras materias como las ciencias sociales (Geografía, Economía, etc.), ciencias naturales (Física, Química, Biología, etc.), Educación Física (puntaje y clasificación de la competencia)" (Álvarez, 1996).

Bien es sabido que las alumnas y los alumnos en la segunda etapa de la escuela básica, consolidan conocimientos que han adquirido en la primera etapa e integran nuevos conocimientos que les permiten avanzar en el dominio de la matemática. En la tercera etapa, los educandos se encuentran en un período de transición del pensamiento operativo concreto al lógico-formal, por ello en esta etapa, reza el Manual del Docente "se inicia la comprensión del carácter formal del pensamiento y del lenguaje de la Matemática, así como de los procesos de abstracción y la Matemática contribuye en gran medida, a la evolución del pensamiento de lo concreto a lo abstracto" (Ministerio de Educación,1987, 17), aunque se sabe que esto no es siempre cierto.

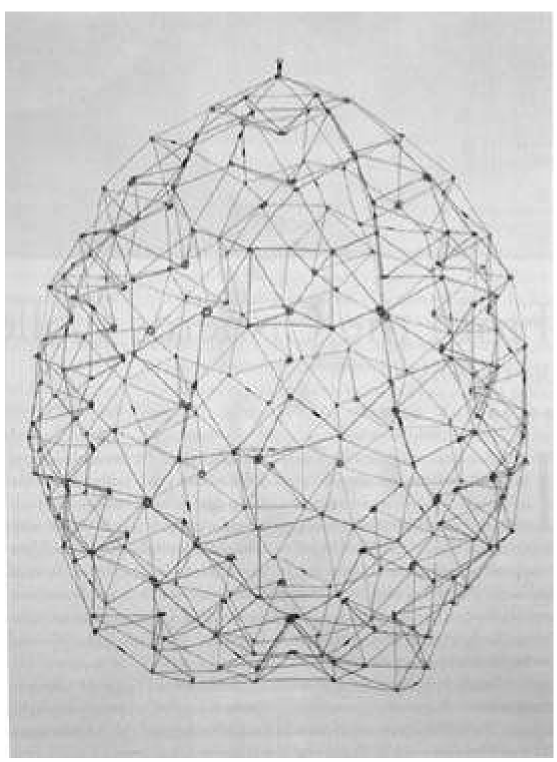
Las y los discentes en el área de Matemática han adquirido capacidad de relacionar y desarrollar su habilidad para generalizar desde un número específico de casos, y proyectar sus pensamientos desde lo real hasta lo posible a partir de informaciones que les sean familiares. Además, en la tercera etapa de la Educación Básica comienzan a exteriorizar sus propios pensamientos y estar en capacidad de seguir procesos ordenados y estructurados, necesarios para la solución de problemas de la vida cotidiana y al desarrollo de la intuición matemática. "La enseñanza de la Matemática se fundamenta en esta capacidad y refuerza la formación del proceso de pensamiento estructurado" (Ministerio de Educación, 1987, 17) a pesar de no ser este el objetivo básico de la Educación Matemática.

Por otra parte, las y los adolescentes están en la edad en la cual se forman los valores sociales de pertenencia que, junto con sus intereses en los acontecimientos nacionales e internacionales, van conformando su futura responsabilidad de ciudadanas y ciudadanos.

El análisis de la prueba en el cual se mide el aprovechamiento matemático vinculado con la realidad en las alumnas y los alumnos cursantes de octavo grado de la tercera etapa de Escuelas Básicas de la ciudad de Caracas, en el periodo Escolar 1999-2000 y alumnas y alumnos del Semestre Introductorio de la Licenciatura en Ciencias Fiscales de la Escuela Nacional de Administración y Hacienda Pública en el año 2001, sirve de motivación, debido a su estrepitoso resultado, a la elaboración de proyectos sobre resolución de problemas cotidianos vinculados con la realidad rompiendo con el esquema estructuralista el cual sigue imperante en Venezuela y en muchos países del orbe.

Una de las razones que justifica la investigación es la convicción de que la enseñanza de la Matemática constituye un hecho fundamental en todo el proceso educativo y en el contexto de la sociedad misma. El objetivo en la enseñanza de la Matemática, según Shvidanenko y Quiñónez (1984), radica en que las y los alumnos adquieran un conjunto determinado de conocimientos y puedan emplear los métodos matemáticos con la finalidad de desarrollar la intuición matemática. Para aplicar exitosamente los métodos matemáticos en el estudio de una u otra cuestión es necesario, claro está, tener conocimiento, poder conducirse correctamente con esta disciplina; pero en particular, es preciso conocer las fronteras del uso admisible del aparato matemático que se aplica. Pero, según Werner (1996), existe un vacío entre el significado social de la Matemática y la percepción subjetiva de la misma. Por un lado, la Matemática es un aspecto esencial de nuestra cultura y nuestra civilización sería inconcebible sin la misma, pero muchas y muchos jóvenes no comprenden por qué se considera necesario estudiar esta asignatura durante todo el período escolar

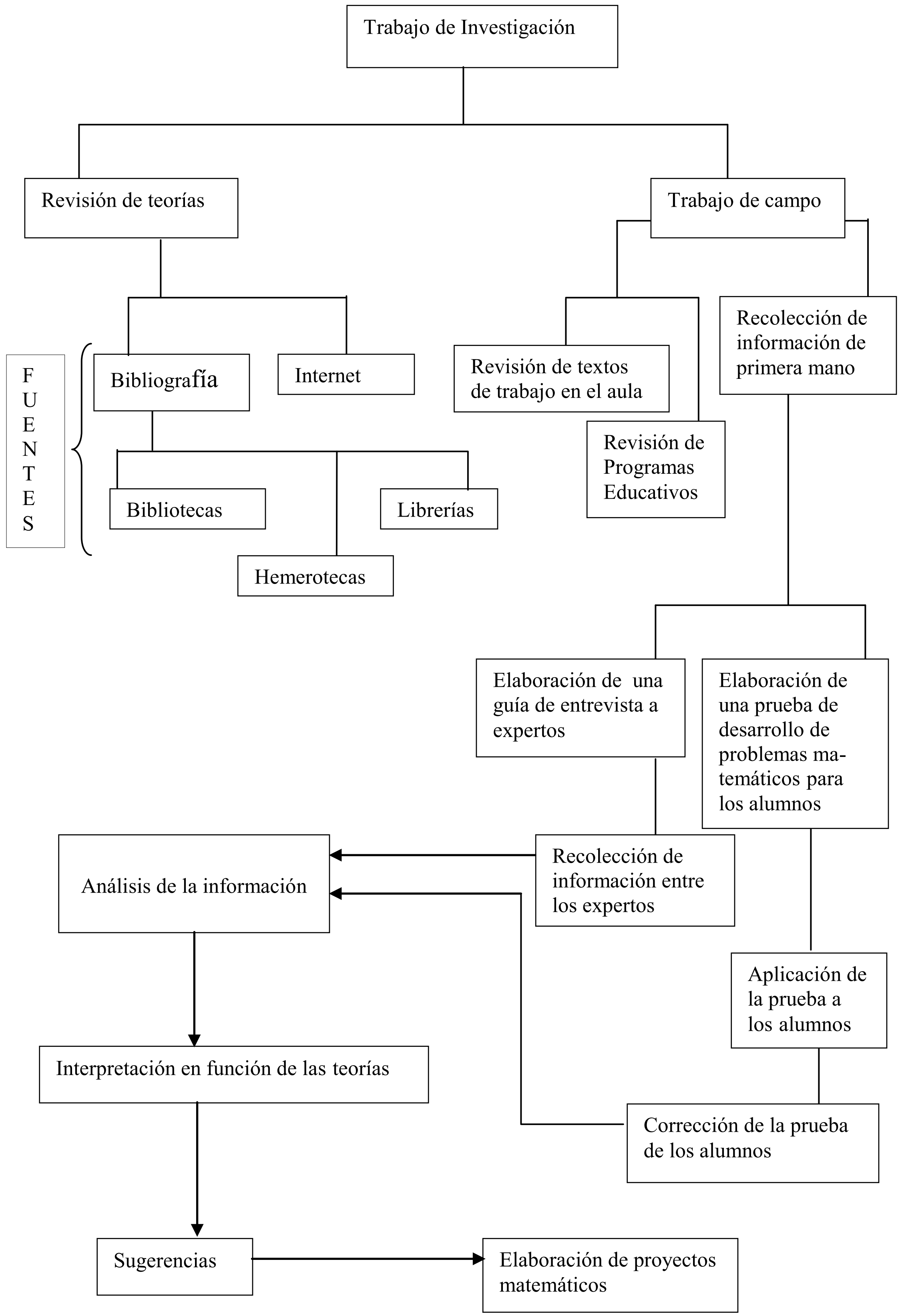
Si el/la estudiante en su aprendizaje se percata de la importancia de la Matemática y observa la estrecha relación que existe entre ella y situaciones de la vida cotidiana donde es posible su aplicación, entonces estará en capacidad de resolverlas. En esto radica uno de los principales objetivos de la presente investigación.



Gego *Esfera,* 1976 Fuente:www.fas.harvard.edu/~drclas/publications/revista/art/cuno.htm

La Matemática tiene carácter instrumental, en el sentido de que capacita a las y los discentes para que logren desenvolverse con éxito en una futura profesión. Es por esta razón que la participación de la y del estudiante en el desarrollo de nuestro país depende también del aprendizaje que se logre en esta disciplina**.** La presente investigación pretende detectar fallas en el aprendizaje de la Matemática de las alumnas y de los alumnos de octavo grado de la tercera etapa de la educación básica y del Semestre Introductorio de la Licenciatura en Ciencias Fiscales de la Escuela Nacional de Administración y Hacienda Pública- Instituto Universitario de Tecnología con la finalidad de aportar ideas que permitan dar soluciones a la problemática de la enseñanza de la Matemática, dentro de la perspectiva matemática y realidad.

1.2.- Esquema de la metodología empleada



Capítulo 2: Aspectos teóricos

2.1.-Matemática y realidad: preámbulo histórico

En concordancia con el problema planteado que consiste en hacer una revisión crítica de la forma de enseñar la Matemática hasta el noveno grado de la Educación Básica y proponer una metodología para enseñar dicha asignatura, distinta a la acostumbrada, introduciendo el método de proyectos, a través del cual se forme en la alumna y en el alumno un pensamiento matemático que le ayude a entender, interpretar y desenvolverse en su entorno y en la vida, es necesario ubicar al lector en la perspectiva histórica de la Matemática. Aunque los autores están concientes de que este preámbulo dista del problema planteado piensan que agrega un tono estético a la investigación.

La Matemática está frecuentemente asociada a la Astronomía, la Física y otras ramas de las ciencias naturales y también profundamente enraizada en las humanidades, razón por la cual es inobjetable que la Matemática está vinculada con la realidad. Por sí misma, la Matemática constituye un campo del saber de considerable alcance; comúnmente se estima que el conocimiento matemático posee un alto grado de validez, independiente de la condición cultural de la mujer y del hombre, aunque puede argüirse que, en el pasado, los ocasos de la cultura han afectado notablemente su desarrollo.

Por lo que se refiere al aspecto científico, la Matemática no es en sí misma una rama de las ciencias naturales. No trata de los fenómenos y objetos del mundo exterior, y de sus relaciones entre sí, sino, en sentido estricto, sólo de objetos y relaciones propiamente imaginarias. Las figuras de la geometría bi o tridimensional son idealizaciones de objetos que se hallan en el mundo físico, pero no existen figuras del espacio n-dimensional. Los números cardinales 1,2,3,..., y aún los números reales en general, pueden considerarse abstracciones de cantidades existentes en el mundo real, pero el número $i = \sqrt{-1}$ (inventado por el matemático italiano Rafaello Bombelli) debe su nombre al hecho de carecer de base en el mundo real, a pesar de que el uso de números complejos $a + bi$ es indispensable para la ciencia y tiene múltiples aplicaciones como es el caso de la electrónica y sus problemas de capacitancia, resistencia y resonancia sin cuyas soluciones no existiera, por ejemplo, el televisor. El matemático alemán del siglo XVII Gottfried Leibniz describió con elegancia la extraña naturaleza del número imaginario: “El número imaginario es un recurso bello y refinado del espíritu divino, casi un híbrido entre el ser y el no ser” (en Bell, 1937, 385).

La vida humana existe en nuestro planeta desde hace unos 25.000 años, pero no es hasta que el hombre se sedentariza- alrededor del año 10.000 antes de nuestra era, cuando es necesario desarrollar formas para contar colecciones cada vez mayores de animales, objetos para el trueque, etc. Esto obliga a crear símbolos numéricos.

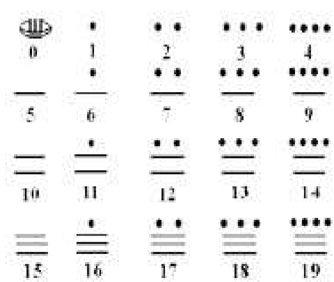
Gottfried Leibniz, matemático alemán (1646 - 1716)
Fuente: www.math.nus.edu.sg/aslaksen/pictures/leibniz.jpg

Rafaello Bombelli, matemático italiano (1526-1573)
Fuente: maurice.bichaoui.free.fr/Histoire36.gif

Todas las civilizaciones que han dejado testimonio sobre su cultura, revelan que poseían sistemas de numeración escrita. Diversos métodos de numeración han existido, uno de ellos, que ha sido universal es el método de contar con los dedos, de hecho nos afirma Bell (1937) que hoy en día contar con los dedos, es la forma utilizada por algunas tribus de América y África.

Solamente dos sistemas numéricos utilizaron el *cero* en la antigüedad: el hindú, que llegó a Europa a través de los árabes, y el de los mayas. El motivo de su surgimiento está íntimamente vinculado con la contabilidad. El cero surge entre los hindúes del ábaco como la escritura posicional de los números. Permite distinguir números tales como 73 y 703. Incluso los babilonios, en el III milenio antes de Cristo, apreciaron la utilidad del cero para evitar confusiones y los griegos acogieron esta idea, usando para representarlo un símbolo circular similar al que empleamos en la actualidad. Además, del mero papel de espaciador entre algunos números, los hindúes otorgaron al cero una existencia independiente. El cero era un número en sí mismo, representaba la cantidad de nada. Por primera vez se había atribuido una representación simbólica y tangible al concepto abstracto de nada y este hecho no debe ser tomado como un adelanto trivial porque el sentido más profundo del símbolo cero (los hindúes lo llamaron sunya) había sido ignorado por todos los filósofos griegos de la Antigüedad, incluido Aristóteles. Él había sostenido que "el número cero debía ser proscrito porque daba al traste con la consistencia de los demás números, puesto que al dividir cualquier número ordinario entre cero se obtenía un resultado incomprensible" (Heath, 1981, 125). En el siglo VI, los matemáticos hindúes dejaron de esconder bajo la alfombra este problema y Brahmagupta, estudioso del siglo VII, fue lo bastante sofisticado como para emplear la división entre cero como definición del infinito (Bourbaki, 1976).

El cero de los mayas no surge por razones de contabilidad, sino que está ligado a la aparición y desarrollo del calendario. El primer día de la cuenta era el día cero, debido a que no había transcurrido ningún día completo. El segundo día era el día uno, lo que indicaba que había transcurrido un día completo, y así sucesivamente (muy similar a la forma de contar las horas en la actualidad). El comienzo de un nuevo ciclo se identifica con el cero para indicar que algo nuevo está comenzando.



Los mayas introdujeron el valor del cero

Fuente: www.cnca.gob.mw/mayach/04.html

Pitágoras de Samos fue uno de los personajes más prestigiosos y a la vez de los más misteriosos de la Matemática. Como no hay referencias directas sobre su vida y su obra, su figura está rodeada por el mito y la leyenda y eso dificulta a los historiadores discernir entre realidad y ficción. Lo que sí parece cierto es que Pitágoras desarrolló la idea de la lógica numérica y fue el responsable de la primera edad de oro de la Matemática (Gorman, 1979). Gracias a su genio, los números dejaron de utilizarse tan sólo para contar y calcular y comenzaron a valorarse como objetos en sí mismos (Ralph, 1961). Estudió las propiedades de cada número, las relaciones entre ellos y las figuras que forman. Se percató de que los números existen con independencia del mundo perceptible y, por tanto, su estudio no está corrompido por la imprecisión de los sentidos (Gorman, 1979). Así pudo descubrir verdades desligadas de la opinión o del prejuicio y más absolutas que cualquier conocimiento anterior.

Pitágoras, quien vivió en el siglo VI antes de Cristo, adquirió sus habilidades matemáticas viajando a lo largo y ancho del viejo mundo. Algunos relatos hacen pensar que llegó hasta la India e Inglaterra, pero lo más probable es que recopilara muchas técnicas e instrumentos matemáticos de egipcios y babilonios. Esas dos civilizaciones antiguas habían ido más allá de los límites del simple cálculo. Supieron realizar cómputos complejos con los que crearon sofisticados sistemas de cálculo y complicados edificios (Heath, 1981). De hecho tenían la Matemática como meras herramientas para solucionar problemas prácticos; el estímulo para descubrir algunos de los principios básicos de la geometría fue facilitar la reconstrucción de los linderos en los campos, los cuales se perdían con las crecidas anuales del río Nilo (Heath, 1981). El término Geometría significa literalmente medir la tierra.

> Pitágoras observó que los egipcios y los babilonios traducían cada cálculo a la forma de una receta que luego podían seguir a ciegas Las recetas transmitidas de generación en generación, siempre daban respuestas correctas, así que nadie se molestaba en cuestionarlas o en indagar la lógica que yacía tras las ecuaciones. Lo importante para estos pueblos era que un cómputo funcionara. El por qué era irrelevante (Singh, 2000, 27).

Además de estudiar las relaciones entre los números, a Pitágoras también lo intrigaban los vínculos que existen entre los números y la naturaleza. Reparó en que los fenómenos naturales están gobernados por leyes y que dichas leyes pueden describirse a través de ecuaciones matemáticas. Uno de sus primeros hallazgos al respecto fue la relación esencial que se da entre la armonía de la música y la de los números.

El instrumento más destacado de la música helénica antigua fue la lira tetracorde o de cuatro cuerdas. Antes de Pitágoras, los músicos ya apreciaron que cuando determinadas notas sonaban juntas causaban un efecto agradable, así que afinaban las liras de manera que, punteando dos cuerdas, consiguieran aquella armonía. Pero estos antiguos músicos no habían comprendido aún la causa de que ciertas notas fueran armónicas y, en consecuencia, no seguían ningún método concreto para "templar" los instrumentos. En lugar de eso afinaban las liras de oído hasta alcanzar un estado de armonía, método al que Platón denominaba "torturar el clavijero".

Jámblico (en Singh, 2000), erudito del siglo XIV que escribió nueve libros sobre la secta pitagórica, relata cómo llegó a descubrir Pitágoras los principios esenciales de armonía en la música:

> En cierta ocasión [Pitágoras] estaba enfrascado en la idea de si se podría concebir una ayuda mecánica para el sentido del oído que fuera a la vez fiable e ingeniosa. Tal aparato sería similar a los compases, a las reglas o a los instrumentos ópticos diseñados para el sentido de la vista, así como también el sentido del tacto dispone de balanzas y de los conceptos de pesos y medidas. Entonces, por algún divino golpe de suerte, pasó por delante de una fragua y escuchó los martillos golpeando el hierro y produciendo entre sí una armonía abigarrada de retumbos, con la excepción de cierta combinación de sonidos (:33 y 34).

Al momento, según Jámblico, Pitágoras echó a correr hacia la fragua para inspeccionar aquella armonía de martillos. Notó que al golpear a un tiempo la mayoría de ellos, se lograba un sonido armónico y, en cambio, cualquier combinación que incluyera un martillo determinado y específico producía siempre un sonido desagradable. Analizó las herramientas y vio que eran armónicas entre sí guardando una relación matemática sencilla: sus masas eran proporciones o fracciones simples de las del resto. O lo que es lo mismo, todos aquellos martillos cuyos pesos mantenían entre sí la proporción de una mitad, dos tercios o tres cuartos producían sonidos armónicos. Por el contrario, el peso del martillo que provocaba la disonancia al golpearlo al unísono con cualquiera de los restantes, no mantenía una relación simple con los otros pesos.

Pitágoras había descubierto la proporción numérica responsable de la armonía musical. Los científicos han arrojado algunas dudas sobre este episodio que relata Jámblico, pero lo que sí es seguro es que Pitágoras aplicó su nueva teoría de las relaciones musicales a la lira.

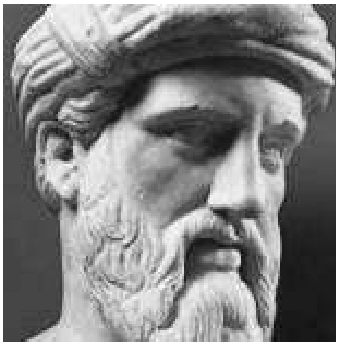
Pitágoras descubrió por primera vez la base matemática que rige un fenómeno físico y demostró que se da una relación fundamental entre la Matemática y la ciencia. Desde entonces, los científicos han buscado los principios matemáticos que al parecer gobiernan cada proceso físico elemental y han averiguado que los números afloran en todo tipo de fenómenos naturales. Por ejemplo, un número particular parece presidir las longitudes de los ríos con meandros o sinuosidades. El catedrático Hans-Henrik Stolum (1996), geólogo de la Universidad de Cambridge, ha calculado la relación entre la longitud real de los ríos desde el nacimiento hasta la desembocadura, así como también su longitud medida en línea recta. Aunque la proporción varía de un río a otro, el valor promedio es algo mayor que 3, o sea, que la longitud real es unas tres veces la distancia en línea recta. En realidad, la relación es aproximadamente 3,14, una cifra muy cercana al valor del número π, que es la proporción que existe entre la circunferencia de un círculo y su diámetro.

El número π derivó en su origen de la geometría del círculo y surge una y otra vez en las circunstancias científicas más diversas. En el caso de la relación fluvial, la aparición de π es el resultado de una pugna entre el orden y el caos. Einstein (en Singh, 2000) fue el primero en apuntar que los ríos tienden a serpentear cada vez más porque, por leve que sea la curva en un principio, ésta provoca corrientes más veloces en la orilla externa, que van originando una margen más erosionada y cerrada. Cuanto mayor sea la curvatura en la orilla, mayor resulta la velocidad de las corrientes en la margen exterior y, con ella, el aumento de la erosión por ese lado. Así, el curso del río se retuerce cada vez más. Sin embargo, existe un proceso natural que detiene el caos: el aumento del serpenteo acaba haciendo que el curso se repliegue sobre sí mismo y se cortocircuite. El río vuelve a enderezarse y el meandro queda abandonado a un lado, convertido en un lago en forma de herradura. El equilibrio entre estos dos factores opuestos conduce a una relación promedio de π entre la longitud real y la distancia en línea recta desde el nacimiento hasta la desembocadura. La proporción de π aparece con mayor frecuencia en ríos que fluyen por llanuras de pendientes muy suaves, como las que hay en Brasil, en una tundra de Siberia o en Guayana en Venezuela, como se aprecia en la fotografía.

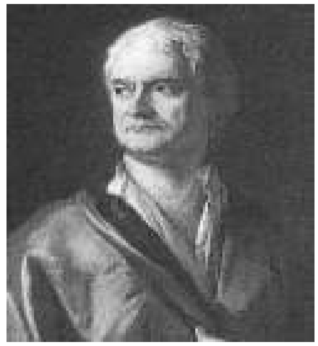
Vista aérea de una parte del río Orinoco

Fuente:www.puc.cl/sw_educ/historia/conquista/parte2/html/h23.html

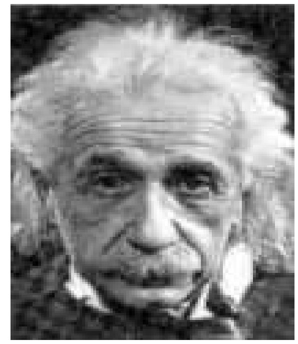
Pitágoras descubrió que los números se ocultan detrás de todas las cosas, desde la armonía de la música hasta las órbitas de los planetas, al tiempo que indagaba en el significado de la Matemática. Pitágoras desarrolló el lenguaje que permitía, a él y otros, describir la naturaleza del universo. En lo sucesivo, cada paso esencial en Matemática proporcionaría a los científicos el vocabulario necesario para explicar mejor los fenómenos de su entorno. De hecho, los avances matemáticos llegarían incluso a inspirar a científicos. Isaac Newton, además de descubrir la ley de la gravedad, fue un matemático destacado. Su mayor contribución a la Matemática fue el desarrollo del cálculo y en tiempos posteriores los físicos utilizaron el lenguaje del cálculo para describir mejor las leyes de la gravedad y para resolver problemas gravitacionales.



Pitágoras 569-500 ó 580-520 A.C. **Fuente:** www.caminantes.net/web/biografias.htm



Isaac Newton, 1642-1727. **Fuente:** rimann.unica.it/attivita/colloquium/greco2/5.htm



Albert Einstein, 1879-1955 **Fuente:**personal.riverusers.com/s/einstein.gif

La teoría clásica de la gravedad newtoniana perduró intacta durante siglos, hasta ser desafiada por la teoría general de la relatividad de Albert Einstein, quien elaboró una explicación alternativa y más detallada de la gravedad. Las propias ideas de Einstein sólo fueron posibles gracias a conceptos matemáticos nuevos que lo dotaron de un lenguaje sofisticado para sus ideas científicas más complejas. En la actualidad, la interpretación de la gravedad está recibiendo una vez más la influencia de los avances matemáticos. Los más recientes estudios cuánticos de la gravedad se vinculan al desarrollo de la teoría Matemática de cuerdas, según la cual las fuerzas de la naturaleza parecen explicarse de manera adecuada mediante las propiedades geométricas y topológicas de los tubos.

Newton creía que los matemáticos perdían el tiempo discrepando unos de otros con inútiles enigmas. Él, en cambio, aplicó la Matemática al mundo físico y lo calculó todo, desde lo relacionado con las órbitas de los planetas hasta las trayectorias de las balas de cañón. Por la época en que Newton murió, en 1727, Europa experimentaba una revolución científica, y en ese mismo año Euler (en Singh, 2000) publicó su primer artículo. Éste, a pesar de contener una Matemática elegante e innovadora, apuntaba principalmente a exponer la solución de un problema técnico referente a los mástiles de los barcos.

> Las potencias europeas no estaban interesadas en aplicar la Matemática a la exploración de conceptos esotéricos y abstractos. Más bien querían explotarlas para resolver problemas prácticos, y competían entre ellas para captar las mentes más destacadas. Euler empezó su carrera con los zares antes de que Federico II el Grande, rey de Prusia, lo invitara a la Academia de Berlín. Con el tiempo regresó de Rusia, bajo el mandato de Catalina la Grande, donde pasó sus últimos años. A lo largo de su carrera abordó multitud de problemas que se extienden desde la navegación hasta las finanzas, y desde la acústica hasta la irrigación. El mundo práctico de la resolución de problemas no atenuó las habilidades matemáticas de Euler. Por el contrario, cada enfrentamiento a una nueva empresa lo instaba a crear una Matemática innovadora e ingeniosa. Su firme pasión lo llevó a escribir

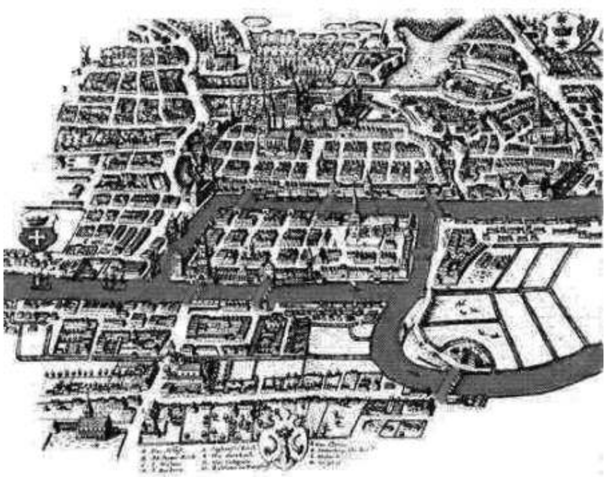
> varios artículos en un solo día. Entre la primera y la segunda llamada para la comida intentaba escribir a toda prisa un cálculo completo digno de ser publicado. No desperdiciaba un segundo y, hasta cuando mecía a un niño con una mano, esbozaba una demostración con la otra (:88).

Uno de sus mayores logros fue el desarrollo del método algorítmico. El objetivo de los algoritmos de Euler era abordar problemas en apariencia imposibles. Uno de esos problemas era la predicción de las fases de la Luna para fechas lejanas en el futuro y con gran precisión, una información que podía utilizarse para elaborar tablas esenciales de navegación. Ya Newton había mostrado que es relativamente fácil calcular la órbita de un cuerpo en torno a otro, pero en el caso de la Luna la cuestión no es tan simple. Mientras que la Tierra y la Luna se atraen mutuamente, el Sol perturba el movimiento de la Tierra y repercute en la órbita lunar.

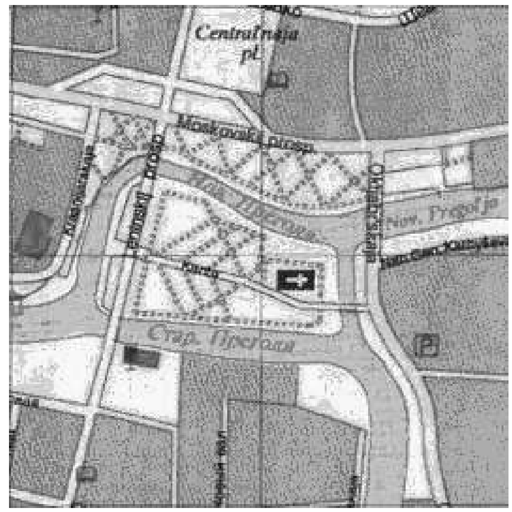
Euler (en Heath, 1981) se percató de que los navegantes no necesitaban saber la fase de la Luna con total precisión, sino sólo con la exactitud suficiente para ubicar sus posiciones con un margen de error de varias millas náuticas. Por consiguiente, desarrolló una receta para generar una solución imperfecta, pero con la precisión adecuada. La receta o algoritmo, obraba mediante la obtención de una primera solución tosca y fácil de calcular, la cual era reutilizada en el proceso para obtener otra más refinada. Esta solución refinada podía, a su vez, reintroducirse en el algoritmo para lograr aún mayor precisión, y así sucesivamente. Tras unas cien iteraciones, Euler era capaz de ofrecer la posición de la Luna con una precisión más que suficiente para las necesidades de la marina. Proporcionó su algoritmo al almirantazgo británico y recibió en recompensa la cantidad de 300 libras esterlinas.

Un problema que también requirió de la fantasía de Euler (en Singh, 2000) tuvo que ver con la ciudad prusiana de Königsberg, perteneciente hoy a Rusia y conocida como Kaliningrad. La ciudad está construida sobre los bancos de arena del río Pregel y consta de cuatro zonas urbanísticas independientes conectadas por siete puentes. Infirió entonces Euler que para trazar la ruta requerida (que cruzara todos los puentes una sola vez) cada punto debería estar unido a un número par de líneas. Esto es así porque, durante el trayecto, cada vez que el viajero atraviesa una zona urbanística debe hacerlo entrando por un puente y saliendo por otro distinto. Sólo hay dos excepciones a esta regla: el inicio y el final del viaje. Al principio de la ruta el viajero abandona una zona urbanística, y para ello sólo necesita un puente de salida.

Al final del recorrido accede a una zona urbanística, para lo que vuelve a requerir sólo un puente. Si el viaje comienza y termina en lugares distintos, estas dos zonas urbanísticas pueden tener un número impar de puentes. Si, por el contrario, el viaje comienza y termina en el mismo lugar, entonces este punto, al igual que todos los demás, debe disponer de un número par de puentes.



Königsberg en tiempos de Euler.



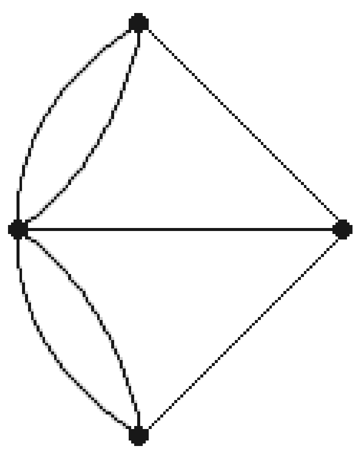
Kaliningrado, hoy.

Fuente: matsun1.matesco.unican.es/maurica/2000/konigsberg.html

Así, Euler concluyó que, en general, en cualquier red o grafo de puentes es posible hacer un viaje completo cruzando cada uno de ellos una vez si y sólo si todas las zonas urbanísticas o masas de tierra constan de un número par de puentes, o bien si dos de ellas contienen un número impar. En el caso concreto de Köningsberg hay cuatro zonas urbanísticas y todas constan de una cantidad impar de puentes: tres de ellas tienen tres puentes cada una, mientras que una posee cinco. Euler explicó así por qué es imposible cruzar todos y cada uno de los puentes de Köningsberg una sola vez, y de paso elaboró una regla aplicable a cualquier grafo o red de puentes en cualquier ciudad del mundo. La demostración es de una simplicidad maravillosa y es tal vez el tipo de problema de lógica que Euler despachaba con un bosquejo antes de las comidas.

Leonard Euler (1707 – 1783)
Fuente:www.siue.edu/~dcollin/pics/mathpics/euler.gif

El rompecabezas de los puentes de Köningsberg es uno de los llamados *problemas de redes* o más genéricamente ***teoría de grafos*** en Matemática Aplicada, e inspiró a Euler a considerar grafos más abstractos.



El matemático suizo Leonard Euler demostró que este problema es equivalente al siguiente: **¿Es posible dibujar el gráfico anterior sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma línea?** Euler demostró de forma general que para cualquier dibujo lineal, como el de la figura anterior, se puede dibujar una línea continua sin repetir ningún trazo si y sólo si el gráfico no tiene ningún vértice impar o tiene exactamente dos vértices impares.
Fuente: www.montevi.edu.uy/proyectok/vida.htm

2.2.- Enseñanza Realista de la Matemática

En función del problema la revisión crítica de las teorías que se presentan a continuación tienen sentido porque forman el marco de referencia para responder a la pregunta de los objetivos específicos 2 (descubrir que en caso de que la usen ¿cuál es esa matemática?) y 3 (indagar si esa matemática usada coincide o diverge con teorías de la enseñanza vigentes).

2.2.1.- El Aprendizaje según Bruner, Gagné y Ausubel

Una pregunta que genera interminables controversias entre los psicólogos es ¿qué es el aprendizaje? Frente a este proceso hay quienes sólo se limitan a tratar de explicar qué ocurre dentro del sujeto que aprende, en tanto que otros, en lugar de ello, señalan qué requerimientos deben darse para que el aprendizaje se produzca, con lo cual el énfasis se desplaza hacia una teoría de la instrucción.

En primer lugar será considerada la teoría de Bruner (1972). Según este autor, el proceso general de aprendizaje ocurre del modo siguiente: los aprendices, mediante diversas manipulaciones (juegos, seriaciones, ordenaciones, etc.) de materiales instruccionales espe-

Jerome Bruner(1915)
Fuente:hlios.unive.it/pedagog/immagini/bruner.jpg

Robert Gagne
Fuente: http://www.psy.pdx.edu/PsiCafe/Graphics/Theorists/Gagne.jpg

David Ausubel
Fuente: http://www.the-scientists.library.Upenn.edu/yr1997/june/jun_art/ausubel.jpg

cialmente diseñados, perciben regularidades que se corresponden con ciertas regularidades intuitivas que ya ellos han comprendido; el aprendizaje se produce cuando los sujetos que aprenden encuentran una especie de apareamiento entre lo que ellos están haciendo en el mundo exterior y algunos modelos y patrones que ya han aprendido intelectualmente; de este modo, el aprendizaje involucra una reorganización interna de ideas y las regularidades presentes en una situación nueva a la cual el aprendiz ha tenido que acomodarse. Este proceso de desarrolla progresivamente a través de tres niveles de representación: enativo, icónico y simbólico.

En el enativo el aprendiz manipula materiales directamente (es aquí cuando el sujeto juega con piezas convenientemente preparadas, las junta, separa, agrupa, reúne, etc.). Luego, al progresar al nivel icónico, el aprendiz trata con imágenes mentales de los objetos. El tránsito a través de estos tres modos de representación de la realidad revela el proceso de crecimiento intelectual que se da en el individuo que aprende. En efecto, en el primer nivel existe una conexión casi directa e inmediata entre las respuestas del individuo y los estímulos que las provocan. Un indicio de desarrollo cognitivo es el *crecimiento de la habilidad para separar las respuestas de los estímulos inmediatos y específicos que las producen.*

Luego, el sujeto resulta capaz de *intelectualizar eventos externos, que ocurren en su ambiente exterior, en una estructura mental que se adecua a ese ambiente* y los ayuda a generalizar a partir de ejemplos o instancias específicas.

Por último, el aprendiz alcanza un estado en el cual no manipula las cosas, ni directamente ni a través de imágenes mentales de ellas, sino que usa símbolos o palabras para representarlas; el uso de palabras y símbolos le permite ir más allá de la intuición y de la adaptación empírica y usar modos de pensamiento lógico y analítico; al llegar a este grado de desarrollo ya el sujeto puede manipular varas variables simultáneamente y puede prestar atención a múltiples y aún conflictivas demandas al mismo tiempo.

En resumen, se puede decir que de acuerdo con Bruner, el aprendizaje consiste en una reorganización interna de ideas previamente conocidas. Este planteamiento es semejante al proceso de asimilación-acomodación expuesto por Piaget (en Klimovsky, 2001). Bruner denomina su enfoque con el título de Aprendizaje por Descubrimiento.

La concepción de Bruner (1972) en relación con el aprendizaje ha encontrado fuerte oposición entre los teóricos norteamericanos. Dos de los más notables psicólogos del aprendizaje que se oponen a Bruner son Robert Gagné y David Ausubel. Cada uno de ellos ha asumido una posición completamente opuesta a la de Bruner. Ellos defienden un enfoque que podría ser denominado Aprendizaje Guiado el cual puede considerarse como la antítesis del descubrimiento. Aunque ellos no coinciden plenamente en todos los aspectos, Gagné y Ausubel representan posiciones teóricas que hacen surgir serias interrogantes en relación con la fertilidad, como principal vehículo de instrucción, de alentar a los estudiantes para que por sí mismos descubran las respuestas a los problemas que les son planteados.

Para Gagné (1979), el aprendizaje es un *cambio en las disposiciones o capacidades humanas que persiste durante cierto tiempo y que no puede ser atribuido sólo al proceso de crecimiento.* El aprendizaje se exhibe como un cambio en la conducta observable que ocurre bajo ciertas condiciones; se infiere que ha habido aprendizaje cuando existe una diferencia en el desempeño de un sujeto antes y después de haber sido colocado en una situación de aprendizaje. Según este autor, el aprendizaje supone tres elementos básicos: un aprendiz, una situación estimulante y las respuestas dadas por el aprendiz.

De acuerdo con Gagné (1979), las personas no aprenden en sentido general sino siempre en el sentido de un cambio de conducta que puede ser descrito en términos de un tipo observable de ejecución humana. Se dice que ha ocurrido algún aprendizaje cuando hay discrepancias positivas entre las conductas que fueron posibles para un individuo antes de que fuera colocado en una situación de aprendizaje y las que fueron exhibidas por dicho individuo después del tratamiento. También se habla de aprendizaje cuando se incrementa la capacidad para realizar algún tipo de ejecución o cuando son alteradas disposiciones tales como actitudes, intereses o valores; el sentido que se da al término *disposición* es el de una tendencia a comportarse en una cierta forma ante determinados estímulos o situaciones. Como puede deducirse, para Gagné el aprendizaje es una *nueva capacidad adquirida por el sujeto*, basada en los comportamientos que él ya poseía; estos comportamientos previos, necesarios para la adquisición de una nueva capacidad, que preexisten en el momento de adquirir nuevos aprendizajes, son denominados Condiciones Internas del aprendiz. Las Condiciones Externas vienen dadas por la organización y secuenciación de los eventos estimuladores del aprendizaje, los cuales varían según el individuo, el material a ser enseñado y los objetivos de la instrucción.

Tomando en cuenta que las capacidades que el individuo previamente ha adquirido constituyen la base de las nuevas capacidades, un nuevo aprendizaje no será posible si el individuo no posee las capacidades intelectuales pertinentes que sirven de soporte a esa nueva habilidad. De este modo cualquier nuevo aprendizaje que deba ser adquirido puede ser descompuesto a analizado en una progresión de aprendizaje y dominio de uno de tipo inferior. Este análisis conduce a la construcción de lo que se denomina Jerarquía del Aprendizaje.

Ausubel (1980) también se opone al aprendizaje por descubrimiento propuesto por Bruner; define el aprendizaje como la adquisición y retención *significativa* de los contenidos o información relacionada con las asignaturas escolares. El término "significativo" se usa en dos vertientes. Primero, refiriéndose al proceso mismo de aprendizaje en el cual el contenido a ser aprendido es incorporado por el aprendiz, de una manera *sustantiva*, a su conjunto de conocimientos, relacionándolo con los conocimientos previamente existentes en una estructura mental. Segundo, refiriéndose a las cualidades del contenido que se debe aprender. Dicho contenido será potencialmente significativo en la medida en que sea relacionable con los conocimientos previos del aprendiz. *La conjunción de la potencialidad significativa del material con su incorporación significativa a la estructura mental del aprendiz constituye el aprendizaje Significativo.*

Ausubel (1980) establece diferencias entre los diversos tipos de aprendizaje con la manifiesta intención de demostrar la superioridad de los métodos expositivos como procedimiento de enseñanza

Los tipos de aprendizaje que Ausubel contrasta son: aprendizaje por recepción y aprendizaje por descubrimiento; aprendizaje significativo y aprendizaje memorístico. El aprendizaje por recepción se da cuando los contenidos y la estructura del material ha ser aprendido son establecidos por la y el docente (o por quien esté encargado de la instrucción); es este tipo de aprendizaje lo que debe ser aprendido es presentado al aprendiz en una forma más o menos acabada; este tipo de aprendizaje no requiere descubrimiento alguno por parte del aprendiz, sólo es requerido que internalice el material o lo incorpore a su estructura mental de modo que esté disponible para la reproducción u otro uso en fechas futuras; en cambio, en el aprendizaje por descubrimiento, el contenido principal de lo que debe ser aprendido no es dado sino que debe ser descubierto por el aprendiz antes que él pueda internalizarlo (Ausubel, 1980).

Debe evitarse la confusión de que aprendizaje por recepción es invariablemente igual a aprendizaje memorístico y que aprendizaje por descubrimiento es igual a aprendizaje significativo, dependiendo de las condiciones bajo las cuales ocurra.

Ausubel (1980) se opone al aprendizaje por descubrimiento y a las técnicas de enseñanza que se basan en la resolución de problemas, señalando que éstas, al igual que una enseñanza expositiva pobre, pueden conducir a un aprendizaje memorístico. En cambio, una buena enseñanza expositiva, en la cual una profesora o un profesor estructura y explica un tema relacionándolo significativamente con temas previamente aprendidos, puede dar lugar a un efectivo y eficiente aprendizaje. Para que el aprendizaje, según Ausubel (1980), sea significativo, deben darse las dos condiciones siguientes:

La primera de ellas es que, el aprendiz debe poseer condiciones y actitudes tales que lo predispongan para enfrentar la tarea de aprendizaje con la manifiesta intención de aprender significativamente. Dichas condiciones son: intención de comprender el material de aprendizaje, aplicar el nuevo aprendizaje y relacionarlo con comprender el material de aprendizaje, aplicar el nuevo aprendizaje y relacionarlo con aprendizajes previos; traducción de la nueva información a una terminología consistente con su vocabulario propio; intento de evaluar cuán bien se ha comprendido la información. Sin embargo, la predisposición para aprender significativamente no siempre se presenta. De hecho, existen causas que hacen que muchos aprendices no estén predispuestos a realizar un aprendizaje significativo. Entre dichas causas pueden ser mencionadas las siguientes: (a) Fallas y frustraciones crónicas en las clases; (b) Profesores(as) que sólo esperan que las definiciones sean repetidas al pie de la letra o que los pasos para resolver los problemas de tarea sean llevados a cabo en una secuencia estricta e inalterable o que las reglas sean aplicadas sin establecer su justificación.

La segunda condición que se debe dar para que el aprendizaje sea significativo es que el material a ser aprendido sea potencialmente significativo para el aprendiz; es decir, que sea relacionable con el conocimiento previamente adquirido. Lo que ha sido aprendido significativamente antes, constituye un “armazón” en el cual puede “engancharse” el nuevo material. La potencial significatividad de un material depende, entre otros, de los factores siguientes:

a) Naturaleza del material a ser aprendido.

b) La manera en la cual la o el docente estructura la presentación de los temas.

c) La estructura cognitiva del aprendiz, es decir, la manera en la cual el aprendiz ha organizado sus conocimientos previos.

Por otro lado, debe tenerse presente que así como hay factores que favorecen el aprendizaje significativo, existen algunos que lo entorpecen. Entre estos últimos tenemos:

1. La carencia por parte del aprendiz del nivel de desarrollo mental apropiado.

2. Insuficiente motivación para aprender significativamente.

3. Creencia, por parte de la y del docente, de que sus listas de definiciones, reglas para resolver problemas y pasos para probar teoremas tiene la misma significatividad para ella y él que para sus alumnas y alumnos.

2.2.2.-Teoría de la actividad[1]

La teoría de la actividad, explica Reverand (2002), es una línea de pensamiento e investigación que surge durante el período de l920-1930, como resultado de los estudios realizados por los fundadores de la escuela de psicología histórico-cultural rusa, Lev Semyonovich Vygotsky, Alexei Nikolaevich Leontiev y Alexander Romanovich Luria.

Sin embargo, a pesar de su vieja data, ha sido en los últimos veinte años cuando la teoría de la actividad ha llegado a ser conocida en el mundo occidental por psicólogos, educadores, sociólogos e investigadores, interesados.

El basamento experiencial de los postulados de L.S. Vygotski -escritos durante una tensa pero creativa década (1924-1934)-, se afincan concretamente en las áreas del *desarrollo onto-*

[1] Tomado en forma parcial de Luis Rubilar Solís. **El constructivismo socio-cultural**. Documentos de apoyo a la docencia.<www.umce.cl/facultades/filosofia/pedagógica/dad_psicología_educacional_i3.html>

genético, de la psicopatología, del análisis del arte y de la neuropsicología, entre otras, y el metodológico en la *concepción dialéctica,* que afirma los criterios de unidad e interdependencia de los fenómenos, procurando siempre la síntesis y la aceptación de la diferencialidad cualitativa. El campo específico en el que trabajará será el *psicológico,* por tanto, sus aportes se ubican en tal 'nivel de integración', incluyendo los niveles físico, biológico y socio-cultural-histórico. No hay 'dualismo', la *unidad* (llámese sistema, estructura o totalidad, *social-históricas*) prevalece, pero en *interconexión* con otras unidades mayores y menores (por ej.: 'personalidad'). Aquí lo determinante es la ***relación o interacción***, ya no la interpolación de leyes correspondientes a distintos niveles de significación (naturales / social-históricas), ni la autarquía y autosuficiencia predicadas respecto a un individuo a-social y a-histórico.

La teoría de Vygotsky se refiere al origen socio-cultural de la mente, a la génesis de la personalidad (y conciencia individual) a través de la apropiación de las formas de la actividad social (en disposición activa y no meramente receptiva), a la importancia del pensamiento y lenguaje como mediadores y organizadores de la realidad y como reguladores de la propia conducta, en síntesis, a que todo lo psicológico tiene su fuente originaria en la interacción y cooperación sociales.

Lev Semyonovitch Vigotsky (1896-1934)
Fuente:www.psi.uba.ar/carrerasdegrado/psicologia/general2/images/image003.gif

El *método histórico-genético (o genético-evolutivo)* propuesto por Vygotsky, ya que está basado en la concepción dialéctica y su visión integradora, incorpora aquellos componentes excluidos ('cognición situada'), otorgando *sentido epistemológico y explicación razonable* a la emergencia y dinámica de las estructuras y procesos individuales en su génesis socio-psicológica.

Habitualmente se ha aceptado que el desarrollo es base previa para el aprendizaje, que deben haberse cumplido gradientes, etapas y logros maduracionales, para la producción de los cambios por aprendizaje. Vigotsky no sólo equilibrará la necesaria y complementaria interrelación entre ambos procesos sino que, además, afirmará que ***el buen aprendizaje precede al desarrollo,*** con lo cual viene a confirmar la prevalencia del troquelamiento cultural de lo psicológico.

La contribución de Vygotsky ha significado para las posiciones constructivistas que el aprendizaje no sea considerado como una actividad individual, sino más bien social. Además, en la última década se han desarrollado numerosas investigaciones que muestran la importancia de la interacción social para el aprendizaje. Es decir, se ha comprobado cómo la alumna y el alumno aprenden de forma más eficaz cuando lo hacen en un contexto de colaboración e intercambio con sus compañeras y compañeros. Igualmente, se han precisado algunos de los mecanismos de carácter social que estimulan y favorecen el aprendizaje, como son las discusiones en grupo y el poder de la argumentación en la discrepancia entre alumnas y alumnos que poseen distintos grados de conocimiento sobre un tema.

2.2.2.1.-La cognición situada y la cultura del aprendizaje[2]

La brecha entre aprendizaje y aplicación es denominada “folklóricamente” por la diferencia entre el “saber qué” y “saber cómo”, lo que puede ser producto de las estructuras de las prácticas pedagógicas llevadas a cabo en nuestro sistema educativo. Varios métodos didácticos asumen que el conocimiento es una única entidad y la separación entre el “saber” y el “hacer”, refiriéndose a las situaciones en las que ambas deben ponerse en práctica. Sin embargo, recientes investigaciones han cambiado esta separación entre lo que se aprende y la forma en la que el saber es aprendido y usado. La actividad en la que el conocimiento es desarrollado no está separada del propio aprendizaje y de la cognición. Por lo tanto, no es neu-

[2] Tomado de “Situated Cognition and the Culture of Learning” de John Selly Brown, Allan Collins, Paul Duguid (Traducción y síntesis: Prof. Alejandra Zangara). En este artículo se explica cómo las actividades son parte integral del conocimiento.

tral. Por el contrario, es parte integral de lo que es aprendido. Las situaciones de aprendizaje son "co-productoras" del conocimiento y éste así se adquiere mediante aquellas. Aprendizaje y cognición son interdependiente y, desde este punto de vista, fundamentalmente situados.

2.2.2.2.-Conocimiento situado y aprendizaje

Miller y Gildea (1987) estudiaron cómo el vocabulario utilizado en las prácticas de enseñanza ha mostrado la separación entre "saber" y "hacer". Las personas aprenden el vocabulario en contextos de comunicación fuera de la escuela, en un proceso rápido y exitoso. Estos autores estudiaron el proceso de adquisición del lenguaje en niñas y niños y descubrieron que en el primer y segundo año de vida se aprende un promedio de 5.000 palabras (13 por día), hasta aproximadamente los 16 años de edad. Por el contrario, el proceso de adquisición de "definiciones abstractas", que se producen fuera de los contextos de uso normal, es más meditado, lento y no siempre tan exitoso. En una clase pueden aprenderse de 100 a 200 palabras por año y no todas se ponen en práctica en la vida cotidiana.

Las lectoras experimentadas y los lectores experimentados entienden implícitamente el contexto donde las palabras están situadas. Luego, buscan definiciones puntuales en los diccionarios, pero son capaces de contextualizar las definiciones en función del "contexto" de la lectura. En este caso, el diccionario "ayuda/colabora" con la interpretación total del texto. En el caso contrario (por ejemplo cuando el diccionario aporta el sentido total de la interpretación del texto) se asume como autosuficiente y los elementos extra lingüísticos de la comunicación "normal" son ignorados. La adquisición de conocimiento funciona de manera parecida al lenguaje. Las partes constitutivas están relacionadas con las situaciones donde fueron producidas. Cada concepto se va "reconstruyendo/resignificando" como resultado de las situaciones en las que se utiliza y de las "negociaciones" de sentido que forman parte de esas situaciones.

Esta forma de entender el conocimiento conceptual (como situado y relacionado intrínsecamente con las situaciones en las que se genera y reconstruye) nos acerca a la noción de "caja de herramientas" pertenecientes a la cultura que Bruner nombra en su texto *La educación* *como puerta de la cultura.* Estas herramientas comparten algún significado con el conocimiento: sólo pueden ser entendidas completamente a partir de su uso, y es esta aplicación la que les otorga su completo significado, incluso en relación con la cultura.

Si el conocimiento es pensado como una herramienta, es posible ilustrar el pensamiento de Whitehead (1929) en cuanto a la distinción entre **conceptos inertes** y **conceptos robustos** (o profundos según Perkins, enriquecidos por el uso). Hasta sería posible adquirir una herramienta y no utilizarla (por ejemplo, la adquisición de algoritmos en forma descontextualizada, lo que los convierte, según esta postura, en conceptos inertes).

Las personas que pueden adquirir conceptos y resignificarlos a partir de su uso (académico, escolar y aun corriente) robustecen no sólo los conceptos, sino su visión del mundo (al menos cultural) en el cual actúan. Su mundo cambia en forma permanente como resultado de esa interacción. De esta forma, aprender, entender y actuar se convierten en fenómenos indisolubles. El aprendizaje es un proceso continuo, que se desarrolla a lo largo de la vida, resultado de acciones en diferentes situaciones.

Cómo usar estas herramientas es mucho más que enumerar una serie de reglas. Está relacionado hasta con culturas particulares y visiones del mundo: no es posible usarlas apropiadamente sin entender cada comunidad o grupo particular. Herramientas culturales similares reflejan una visión cultural del mundo y de experiencias individuales de los integrantes de una comunidad.

2.2.2.3.-Aprendizaje, socialización y actividades auténticas

El proceso de socialización aparece relacionado, en principio, con el de aprendizaje. Significa qué aprendizajes debe llevar a cabo cada persona para convertirse en maestra, maestro, oficinista, artista, etc. Durante la vida, la gente —en forma consciente o inconsciente— adopta modelos culturales de los diferentes grupos sociales a los que pertenece, tanto en la cultura cotidiana como académica (en este caso, deben respetarse y adaptarse a reglas culturales “evidentes”).

Dentro de este marco (de socialización o endoculturación), debemos explicar la diferencia entre actividades escolares y actividades auténticas. Las actividades de conocimiento están enmarcadas por la cultura de la que forman parte. Su significado y propósito está socio-culturalmente construido por la "negociación" entre los miembros pasados y presentes de una sociedad. Estas actividades auténticas están definidas por todos los partícipes dentro del marco de una cultura determinada. No solamente están propuestas por expertos/as.

Las actividades educativas en general y escolares son a menudo híbridas, enmarcadas implícitamente en una cultura, pero explícitamente atribuidas a otra. Cuando las actividades auténticas son transferidas a una clase, su marco cultural debe ser inevitablemente transferido.

Cuando se diseñan actividades didácticas, debe tenerse en cuenta los conceptos asociados como la cultura de estas actividades (si son auténticas) y las competencias necesarias para su comprensión (que pueden pertenecer a una cultura más cotidiana que formal escolar) y aplicación. Este concepto es central para comprender los problemas que rodean al aprendizaje en general y escolar. Lave (con sus estudios etnográficos, 1988) demostró cuán diferentes son las actividades escolares de aquellas que dan sentido a la cultura de la cual la escuela forma parte y que desafían a los estudiantes fuera de la escuela. Lave (1988) describe la **conducta JPF** (Just Plain Folks) como la conducta deseada en la escuela, que dista mucho de la que necesita desarrollar la persona fuera de la escuela para vivir en la comunidad de la que forma parte. Los componentes importantes de este tipo de conducta son: (1) la solución a los problemas planteados no representa un desafío, sólo basta con "seguir las reglas" y (2) el conocimiento es fraccionado, no situado ni integrado a la cultura.

2.2.2.4.-El aprendizaje pensado como proceso cognitivo situado

Se presentan ejemplos de situaciones desafiantes (con actividades "auténticas" según los términos descriptos antes) que favorecen o desencadenan aprendizajes ricos desde el punto de vista cognitivo (Collins, Brown, Newman, Schoenfeld).

Se destacan diferentes tipos de conocimiento:

Intuitivo

Computacional (basado en algoritmos)

Concreto

Conocimiento basado en asociación de principios

Características de este tipo de aprendizaje:

La tarea debe resultar lo suficientemente familiar como para que los estudiantes puedan partir de sus "conocimientos implícitos".

Los estudiantes deben estar en condiciones de entender la tarea (en términos de usar sus propios heurísticos): cuánto saben y qué se les pide como desafío.

Deben estar en condiciones de generar sus propios caminos de solución y qué herramientas (culturales) deben poner en juego.

Características del aprendizaje grupal:

Los grupos no son sólo la suma de individualidades de sus miembros. Los mecanismos de trabajo y negociación de significados son propios de cada grupo (integra lo cultural y lo individual).

Se deben respetar los diferentes roles. Una tarea grupal exitosa debe respetar este principio.

Los grupos deben desarrollar habilidades de trabajo colaborativo. Estas habilidades tienen una importancia creciente, tanto en lo individual como en lo grupal y cultural.

Los conceptos de realidad, ciencia y cultura son básicos para poder comprender el proceso de creación de ámbitos de significado compartido.

Para Bruner, como para Vigotsky "*no existe un mundo real, único, preexistente a la actividad mental humana (...) el mundo de las apariencias, es creado por la mente*" (Bruner, 1987, 103).

El mundo real no es un contexto fijo, no es sólo ni principalmente el universo físico. El mundo que rodea el desarrollo del niño(a) es hoy, más que nunca, una clara construcción social donde las personas, objetos, espacios y creaciones culturales políticas o sociales adquieren un sentido peculiar, en virtud de las coordenadas sociales e históricas que determinan su configuración.

Hay múltiples realidades como hay múltiples formas de vivir y dar sentido a la vida desde las peculiaridades espaciales y temporales que rodean la vida de cada individuo y cada grupo. En definitiva, hay tantas realidades como versiones de la realidad, como representaciones subjetivas se elaboran sobre las múltiples formas de vivir.

> *"Conocemos el mundo de diferentes maneras, desde diferentes actitudes y cada una de las maneras en que lo conocemos produce diferentes estructuras o representaciones o, de hecho, realidades (...) tanto el mirar como el escuchar están conformados por las expectativas, la actitud y la intención"* (Bruner, 1987, 115)

2.2.3.- Concepción Estructuralista[3]

"a la luz, mejor dicho, a la oscuridad de la
estructura todos los gatos son pardos"
Vygotsky

De acuerdo con la concepción estructuralista, la Matemática en cuanto a que es una disciplina netamente cognitiva supone un sistema organizado, cerrado y deductivo. Para la Educación Matemática, esto significa que la estructura del sistema es la línea maestra en el proceso de aprendizaje. Profundizar en la estructura de la Matemática es algo de importancia fundamental para esta educación dirigida sistemáticamente y en ese sentido el profesor Clemente Moreno (en Mora, 1998, 107) refiriéndose a la problemática de la enseñanza de la Matemática en Venezuela, comenta "Yo creo que es un problema que viene desde la reforma hecha en 1969, esa reforma tan bárbara de la Matemática moderna del grupo Bourbaki, no sé hasta qué punto ellos nos ayudaron y hasta qué punto nos desfavorecieron". No sorprende que uno de los defensores ardientes de esta aproximación fuese Dieudonné. En su planteamiento de la

[3] Tomado parcialmente del artículo **La educación realista de las matemáticas** del pedagogo holandés Jan De Lange Jzn, publicado en la revista Studia Pædagogica. Nro 21 en el año 1989 de la Universidad de Salamanca.

conferencia titulada*: El nuevo pensamiento de las Matemáticas sociales* propuso ofrecer a los discentes una teoría completamente deductiva, empezando directamente por axiomas básicos.

En la misma ocasión rechazó el lineamiento de la escuela tradicional matemática con el famoso slogan de ¡Abajo Euclides¡. Su objetivo para la enseñanza de la matemática era entrenar a los discentes en la deducción lógica y retener algunas ideas del método axiomático. Choquet, aunque menos extremista que Dieudonné (en opinión del editor del informe Royaumont), también abogó por un punto de vista estructuralista. Él proclamó que el conjunto $\mathbb{Z}$ constituye una base excelente para los discentes jóvenes:

> El conjunto de enteros positivos N, o aún mejor, el conjunto de enteros $\mathbb{Z}$, contiene numerosas estructuras, tales como orden, grupo o anillo, y cada una de ellas tiene características especiales que hacen $\mathbb{Z}$ particularmente claro para aritméticos especializados. Tenemos a disposición un ejemplo excelente de una estructura en la que los principales conceptos de álgebra pueden ser estudiados.

Las ideas de Servais fueron menos extremistas y fueron aprobadas por muchos de los participantes. La matemática es vista como una estructura, una construcción completa. En la educación Servais argumenta “El edificio íntegro debe ser reconstruido desde los fundamentos y erigido de acuerdo con las ideas modernas. Las ideas modernas son, en su mayor parte, la teoría de conjuntos”. Las ideas de Servais llegaron a estar operacionalizadas en los libros de texto.

También Félix (Lucienne), muy influyente en Francia y relacionado estrechamente con el grupo Bourbaki, expresa un punto de vista estructuralista para la enseñanza de la matemática:

> Las leyes de la estructura matemática son las leyes del pensamiento lógico. Por esta razón los primeros capítulos de la matemática avanzada describen, de forma abstracta, lo que debe dibujar el maestro(a) en la atención de sus discentes para ayudarles a aprender a pensar

Uno de los tres participantes en el Congreso Royaumont fue Vredenduin. Siguiendo el concepto de estructura, al menos en sus libros de geometría, desarrolló experimentos en las escuelas secundarias.

Max Beberman, padre de la nueva Matemática

Fuente: www.uni.uiuc.edu/about_uni/HistoryofUni/Beberman_small.gif

Sus conclusiones años después: “Un edificio maravilloso, pero no creo que haya un estudiante que comparta esta opinión”.

Comentarios críticos a las ideas de estos *estructuralistas* fueron hechos por Thom en 1972. Reaccionando al ¡Abajo Euclides!, él defendió la Geometría Euclídea:

> Ellos- los Bourbakistas- abandonan el terreno ideal para el aprendizaje previo a la investigación: la Geometría Euclídea, esa inagotable mina de ejercicios, y la sustituyen por esas generalidades de conjuntos y lógica, lo que significa el material más pobre, vacío y descorazonador para la enseñanza que pueda existir.

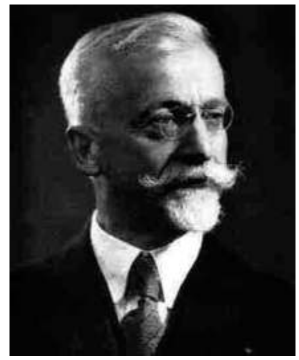
El énfasis puesto en lo axiomático por los modernistas (estructuralistas) no es solamente una simplificación pedagógica- lo cual es obviamente suficiente-, sino algo verdaderamente matemático.

El hecho de que sean ignorados principios pedagógicos fue reconocido por Beberman, quien admitió que el nuevo currículum (desarrollada por él mismo en Estados Unidos) había fallado al no relacionar la matemática con el mundo real. En otra ocasión planteó dudas más amplias sobre la adecuación de su programa:

Creo que en algunos casos hemos intentado contestar preguntas que los estudiantes nunca hacen y resolver dudas que nunca tienen, de hecho hemos contestado nuestras propias preguntas y resuelto nuestras propias dudas de adultos(as) y profesores(as), pero éstas no eran dudas y preguntas de las y los estudiantes.

Jean Dieudonne, 1906-1992
Fuente:http://www.gabay.com/images/Auteurs/DIEUDONNE/jpg

Gustave Choquet
Fuente: adela.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kma/ss/gen/choquet.jpg



Nicolas Bourbaki (1849-1925)
Fuente: http://perso.wanadoo.fr/altamathematica/images/Cartan.jpeg

En el mismo año en que Beberman expresaba estos sentimientos, se publicó un memorando en *Mathematics Teachers* y *American Mathematics Monthly (ahlfors.1962):*

"Los matemáticos podrían suponer inconscientemente que todos los jóvenes podrían querer lo mismo que los matemáticos actuales o que solo los estudiantes que merecen la pena son los que podrían llegar a ser matemáticos".

"Conocer la matemática significa ser capaz de hacer matemática: usar el lenguaje matemático con fluidez, hacer problemas, criticar argumentos, encontrar pruebas y lo que debería ser la actividad más importante, reconocer un concepto matemático en, o extraerlo de una situación concreta dada. Sin embargo introducir nuevos conceptos sin un bagaje suficiente de hechos concretos, introducir conceptos unificadores donde no hay experiencia en unificación o trabajar en conceptos dados sin aplicaciones concretas que puedan provocar a los estudiantes, es más perjudicial que beneficioso: una formalización prematura podría desembocar en algo estéril; la introducción prematura de abstracciones encuentra especial resistencia en mentes críticas que, antes de aceptar la abstracción, desean saber por qué es relevante y cómo podría ser utilizada"

"La matemática separada de otras ciencias pierde su fuente más importante de interés y motivación"

> *"Extraer el concepto apropiado de una situación concreta, generalizar desde casos observados, argumentos inductivos, argumentos por analogías y razonamientos intuitivos para una conjetura formulada son formas de pensamiento matemático"*

> *"De acuerdo con nuestros principios creemos que la introducción de nuevos términos y conceptos debería estar precedida por una suficiente preparación en lo concreto seguida por aplicaciones provocadoras genuinas y no por material escaso e inconcreto: uno debe motivar y aplicar un nuevo concepto si uno desea convencer a un joven inteligente de que el concepto vale la pena"*

Entre los firmantes encontramos: Bers, Birkhoff, Courant, Coxeter, Kline, Morse, Pollak y Polya.

La enseñanza de la Matemática debería estar vinculada con la realidad, de hecho el currículo de Matemática debería servir para las necesidades de todas las discentes y de todos los discentes.

2.2.4.- ¿Qué es la vida real?

Escultura de Carlos Cruz Diez en Margarita, Venezuela

Fuente: http://www.cumbre.ve/pg12-4d.htm

La pregunta sobre la vida real puede ampliarse, incluso, indagar sobre qué es la realidad. Y no se trata de elucubrar y de dar respuestas presuntuosas, pero sí de preguntarse qué es más real, si Tanzania o ¿Quién quiere ser millonario? Y se trata de acercarse a la respuesta desde el punto de vista de las alumnas y los alumnos y de la adaptación a ella. Por eso, la vida real se tendría que tomar como el conjunto de intereses de las alumnas y de los alumnos (Corbalán, 1997). La esencia del trabajo educativo es el convencimiento de que esos intereses, pueden ser reconducidos, modelados, cambiados y en definitiva mejorados, con la educación. Pero para ello las y los docentes tienen que estar alertadas y alertados para captar la realidad de las alumnas y de los alumnos. Y tener en cuenta elementos cambiantes constitutivos de esa realidad: la televisión, la música, los juegos computarizados, los deportes, etc. y la forma cómo la Matemática interviene en ellos. Ahora, la realidad no es la misma para todos, pero la que debe ser considerada es la realidad de las alumnas y de los alumnos y no la de las profesoras y de los profesores. La y el docente debe responder ¿por qué se estudia Matemática? y aquí divergen algunas opiniones, por ejemplo, el líder estadounidense Malcolm X confiesa:

> *...Siento tener que decir que no me gustaba la matemática. Muchas veces he reflexionado sobre esto. Creo que era porque en matemática no hay discusión posible. Si te equivocas, te equivocas y basta.* (en Corbalán, 1998).

En un punto de vista opuesto está el extraño e inusual canto de amor que hizo el filósofo, matemático y premio Nobel de literatura inglés Bertrand Russell:

> *...No me suicidé porque deseaba aprender más matemática.*

Entre esos dos extremos, quizá no tan reflexivos ni tan nítidos, están las opiniones de las alumnas y de los alumnos, las futuras ciudadanas y futuros ciudadanos.

Muchas son las voces que hoy demandan una formación diferente para la ciudadana y el ciudadano del siglo XXI y muchos son los/as pedagogos/as que han escrito sobre el tema (Freudenthal, 1967; Corbalán, 1997; Azcárate, 1997; Berini, 1997; Blanco, 1996; Werner, 1996; Callejo, 1994; García, 1994; Knijnik, 1997; Lladó, 1997; Niss,1995; Pola, 1993; Rico Romero,1997; Schoenfeld, 1985; Torres, 1994; Schwarz, 2002; Villar, 1998; Mora, 1998; entre otros/as), abogando por una educación que le permita al futuro/a ciudadano/a superar los grandes obstáculos y controversias con los que se va a enfrentar al analizar e intervenir en el entorno. En un mundo donde los medios de comunicación y tecnológicos están a la disposición de gran parte de la población, facilitando el acceso a una cantidad de información impensable que se pueda tratar en la escuela, es absurdo pensar en la escuela como una mera transmisora de conocimientos (Azcárate 1997). Su labor tiene que ir mejor dirigida a facilitar las estrategias necesarias a los estudiantes para que ellos puedan interpretar, integrar y transformar dicha información en un conocimiento útil para su intervención en la realidad (Hernández, 1992b). “El conocimiento escolar debe llegar a poder ser un sistema de pensamiento o de ideas que permita una mayor comprensión del mundo y una mayor capacidad de actuación sobre él” (García, 1994, 70)

Comprender el entorno social o el mundo implica aprender a relacionar y analizar aguda y críticamente la realidad no como un conjunto de partes sino como una totalidad. Sin embargo, gran parte de los conocimientos transmitidos a lo largo del todo el proceso educativo, desde la escuela infantil a la universidad pasando por la Escuela Básica , son hoy caducos, obsoletos y ajenos y están enseñados de tal forma fragmentaria y reduccionista,

proyectando una imagen desvirtuada de la compleja realidad en la que nos encontramos. “Para afrontar el estudio de la realidad es necesario un planteamiento global sin las fragmentaciones impuestas en el curriculum a través de las diferentes disciplinas” (Morín, 1994, 76).

Si bien las disciplinas son modelos de la realidad y, por tanto, herramientas útiles para su interpretación, la alumna y el alumno generalmente reciben una visión parcelada, descontextualizada y sin relación entre los diferentes tipos de conocimientos que se les intenta transmitir. Imagen que en los últimos años se intenta romper buscando nexos de unión entre los conocimientos desde propuestas más integradoras.

Al hablar de las relaciones entre las disciplinas que habitualmente estudian los fenómenos naturales y sociales se encuentran numerosos problemas y dificultades en los cuales hay una gran diversidad de opciones y formas muy diferentes de entender la conexión e interacción entre las diferentes disciplinas.

Un programa ideal enseña conceptos matemáticos al igual que operaciones matemáticas. Tanto los conceptos como las operaciones están incluidos en redes de conocimiento estructuradas alrededor de ideas clave o ideas fundamentales y son enseñados dentro de contextos de aplicación justo desde el principio (Bruner, 1987). En comparación con lo que se hace de manera típica, los estudiantes pasan menos tiempo trabajando en forma individual en hojas de habilidades de cálculo y más tiempo participando en discursos dirigidos por la profesora o por el profesor relativo a los significados e implicaciones de los conceptos matemáticos y sus aplicaciones a la solución de problemas.

Las profesoras y los profesores explican y modelan el razonamiento matemático usado para abordar clases de problemas, luego estimulan a los estudiantes a participar en dicho razonamiento por sí mismos. Además de ser expuestos a ejercicios bien estructurados que sólo requieren que reconozcan tipos de problemas y luego apliquen fórmulas familiares, los estudiantes son expuestos a las clases de problemas mal estructurados que ocurren en la vida real y que requieren que se descubran e inventen formas de plantearlos y solucionarlos. A menudo tales aplicaciones pueden ser enfocadas en muchas formas diferentes, proporcionando por tanto oportunidades para que los estudiantes examinen estrategias de solución potenciales.

El discurso dirigido por la profesora y por el profesor que rodea a estas aplicaciones implica un examen sostenido y meditado de una pequeña cantidad de preguntas relacionadas en lugar de una exposición rápida de hechos numéricos. Se caracteriza por una gran cantidad de razonamiento matemático de orden superior al generar y debatir ideas acerca de cómo podrían ser enfocados los problemas.

Lampert (1989) ha enfatizado la enseñanza para el entendimiento y el desarrollo del poder matemático en los grados intermedios. Ella no sólo enseña habilidades sino un lenguaje para usarlo al describir fenómenos matemáticos, conectar las operaciones y relaciones matemáticas con operaciones y relaciones más familiares y concretas, y para guiar la construcción de significado de los estudiantes respecto a los símbolos y operaciones matemáticos de modo que se centre en ideas claves extraídas de la disciplina. Lampert (1989) instruye en forma activa, pero con énfasis en los procesos, relaciones, métodos múltiples y oportunidades para que los estudiantes evalúen y discutan las soluciones a los problemas propuestos. Se enfatiza la pesquisa de grupo caracterizada por diálogo o argumentación sobre las presentaciones de la profesora y el profesor, y la discusión se centra en los méritos relativos de sugerencias alternativas para enfocar los problemas en lugar de centrarse en hallar una *respuesta correcta*.

Lampert (1989) identificó cinco claves para su enfoque: 1) involucrar a los estudiantes con fenómenos que ellos sienten problemáticos, a modo de encontrar soluciones que les importen a ellos, 2) usar representaciones múltiples de conceptos para asegurar que los estudiantes entiendan sus significados, 3) enfatizar el diálogo (incluyendo la discusión, no sólo el discurso) como el vehículo para construir el significado, 4) diagnosticar los niveles de entendimiento de los estudiantes y las necesidades para la explicación correctiva conforme progresa el diálogo, y proporcionar la instrucción necesaria, y 5) enseñar a los estudiantes a estar dispuestos y ser capaces de colaborar en la solución de problemas y en la construcción de conocimiento nuevo.

Estos enfoques para la enseñanza de matemática que han sido desarrollados en fechas recientes en los Estados Unidos tienen mucho en común con los métodos enfatizados en Japón y en China (Stigler y Stevenson, 1991). Las clases de matemática en esos países están orientadas hacia la solución de problemas en lugar hacia el dominio memorizado de hechos y procedimientos. Las profesoras y profesores usan muchos tipos diferentes de materiales representacionales y a menudo se basan en las y los estudiantes como fuentes de información. Dirigen la clase en discusiones de los problemas, actuando como guías eruditos que buscan estimular a los estudiantes para producir, explicar y evaluar soluciones potenciales en lugar de cómo dispensadores fundamentales de información y árbitros de lo que es correcto (Fernández,Yoshida y Stigler, 1992; Lappan y Ferrini-Mundy, 1993; Wheatley, 1992).

La Matemática y las y los profesionales responsables de su educación se han mantenido inmunes a estos temas durante muchos años, limitando sus reflexiones al contexto interno de la propia Matemática. Para muchas profesoras y muchos profesores de Matemática mejorar la enseñanza de la Matemática implicaba articular mejor la propia Matemática (D'Ambrosio, 1994). Quizá una de las principales dificultades para incorporar enfoques más integradores del currículo matemático es la propia visión de los educadores matemáticos, formados en un pensamiento fuertemente disciplinar con pocas conexiones con otros conocimientos. Pocas veces las y los profesores de Matemática tienen claro el papel de la interdisciplinariedad cuando se habla del conocimiento matemático.

De hecho, muchos(as) de los(as) actuales profesores(as) de Matemática, y gran parte de la sociedad, consideran la Matemática como un área cerrada en donde todo está ya inventado y constituido, un conocimiento estable, verdadero y accesible sólo a unos pocos. En consecuencia a las alumnas y a los alumnos se les transmite una imagen inerte de la Matemática, se les somete a una mera adquisición de conceptos como entidades bien definidas y con gran nivel de abstracción, definiciones descontextualizadas y algoritmos memorizados. Como dice un buen amigo, profesor de secundaria, en la escuela las alumnas y los alumnos hacen pocas cosas más que calcular: sumas, divisiones, tantos por ciento, áreas, volúmenes, límites, derivadas e incluso integrales operaciones que, en general, no saben como utilizar fuera del contexto escolar y por tanto, no pueden hacer uso de ello. En cierta manera, el trabajo matemático desarrollado en el contexto escolar es irreal y no produce un aprendizaje útil para la vida.

La mayoría de las ciudadanas y los ciudadanos, al completar su educación obligatoria, pueden aplicar rutinas de cálculo aritmético o reconocer ciertas figuras geométricas pero, no pueden resolver problemas simples que requieran de una aplicación del conocimiento matemático. En general, los adultos poseen una colección muy pequeña de hechos matemáticos y unas limitadas estrategias de resolución de problemas. El actual desarrollo tecnológico implica una nueva aproximación a la hora de pensar y tratar los problemas e ideas matemáticas. Por ejemplo, las calculadoras hacen obsoletos los largos y tediosos cálculos sobre el papel de los tristemente famosos cuadernillos de cuentas tan habituales en las escuelas. Ya no es tan importante la velocidad y la exactitud de los algoritmos de lápiz y papel, el énfasis debe desviarse hacia la comprensión conceptual y las estrategias de resolución de problemas que nos permitan un uso efectivo y adecuado de los medios tecnológicos de los que disponemos.

Es muy diferente aprender o memorizar unos determinados hechos o procedimientos matemáticos, que saber hacer uso de lo aprendido. Para lo segundo, es necesario integrarlo en las formas de pensamiento del sujeto, comprender su significado y relación con las situaciones donde puede ser aplicado. Ésta sería la diferencia de aprender un conocimiento matemático escolar, desde y para la escuela o aprender un conocimiento matemático escolar desde la vida para la vida, aunque adquirido en el ámbito escolar.

Poco a poco se van introduciendo nuevas formas de hacer matemática en la escuela, aproximándose a una visión de la Matemática más cercana a la vida y considerada más como un conocimiento provisional, interpretable, relativo, construido socialmente y accesible a todos. Hay ya numerosos ejemplos de propuestas curriculares que reflejan formas alternativas de trabajar la Matemática en la escuela (Giménez, Fortuny y Alsina, 1995; Berini, 1997 y Lladó, 1997) y que implican una nueva organización curricular.

Al intentar abordar la problemática de la Educación Matemática desde una visión integradora, la Matemática no puede ser objetivo último de la educación ni el referente exclusivo para la determinación del currículo escolar. Si la Matemática escolar debe estar dirigida a permitir al sujeto una mayor comprensión de la realidad, es necesario analizar los problemas que necesitaran en su vida cotidiana. Análisis que nos puede dar luz sobre interrogantes como:

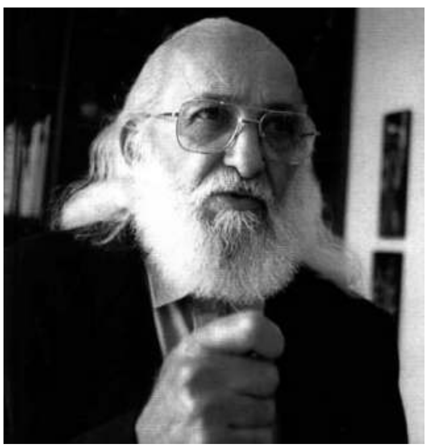
¿Qué papel tiene o puede tener la Educación Matemática en la formación de una ciudadana y de un ciudadano del siglo XXI?

¿Qué tipo de conocimientos matemáticos, conceptuales y procedimentales le demanda la sociedad para su integración crítica, autónoma y responsable?

La filosofía del método realista de la enseñanza de la Matemática se fundamenta en un famoso paradigma de Hans Freudenthal (1973), el cual equipara el aprendizaje matemático con la reinvención dirigida de la Matemática, es decir, con la reinvención de la Matemática por parte de las alumnas y de los alumnos bajo la guía de las profesoras y de los profesores. Este reconocimiento del carácter constructivo de todo conocimiento matemático es uno de los efectos normativos en la Matemática realista, teniendo el efecto de regir el diseño de todo currículo matemático así como la producción de las unidades didácticas correspondientes. En la Matemática realista, la instrumentación del currículo matemático se atempera constantemente a las realidades observadas en las aulas donde se pone en práctica. El desarrollo curricular realista es uno autovalidable ya que por su propia naturaleza se ajusta sobre la marcha para que responda adecuadamente a los requisitos cognoscitivos de las poblaciones estudiantiles que emplean el currículo. Como es de esperarse, el punto de vista constructivista implícito en la idea de la reinvención dirigida de Freundenthal (1973) tiene profundas consecuencias metodológicas en la educación matemática realista. Por ejemplo, la didáctica realista reconoce que hay una gran lección que aprender de la historia del desarrollo de las ideas matemáticas (Streefland, 1991). Tales notaciones, aunque más rústicas y menos depuradas que las notaciones más modernas, resultan muy útiles para el estudio, precisamente por la cercanía que tienen a los contextos de estudio de donde surgen inicialmente las ideas matemáticas

Es obvio que numerosos problemas del entorno necesitan de conocimientos y de tratamiento matemático para su mejor comprensión y precisa interpretación y resolución. Procedimientos de toma de decisiones, organización e interpretación de la información, relaciones de proporcionalidad, métodos numéricos, descripción del medio espacial, sus objetos y sus relaciones, formas de presentación, organización del tiempo, etc., todos son conocimientos absolutamente necesarios para la intervención en el medio en que nos movemos. Lo que le interesa al ciudadano es disponer de un sistema de pensamiento matemático efectivo para resolver problemas prácticos y cotidianos, que le permita un mayor desarrollo de sus capacidades estratégicas de comprensión e intervención y le aporte un lenguaje para interpretar y modelar la realidad. La escuela debe buscar formas para dar respuestas a estas demandas.

2.3.- La Educación Matemática Básica: su papel en la formación de la ciudadana y del ciudadano


Paulo Freire
Fuente: www.nl.edu/ace/Resources/Freire.html

El quehacer primordial de la educación matemática ha estado vinculado, históricamente hablando, con la actividad de los seres humanos en su relación con el mundo (Freire, 1996) y ha tenido como objetivo la solución de problemas, especialmente en el contexto externo a la misma matemática (Morris, 2000).

En tal sentido, es importante recordar algunas palabras del gran estudioso del desarrollo histórico de las matemáticas Hans Wussing (En Mora, 2002a,) quien señala claramente lo siguiente:

> La historiografía marxista de las matemáticas se basa metodológicamente en el materialismo histórico y dialéctico. Según éste, toda la ciencia es una manifestación social. También las matemáticas son una forma específica de la conciencia social. Son algo mas que el resultado del intercambio de conocimiento, de teorías y métodos, están conformadas simultáneamente por intereses materiales e ideales de las correspondientes clases dominantes, son el producto de instituciones y escuelas científicas y dependen también de la posición social del científico y de su ideología, además, por último, las matemáticas son objeto de la política científica. En otras palabras: las matemáticas no son en absoluto un ámbito, autónomo, sino una componente integrante de la vida social; es decir, las ma-

> temáticas han estado, ahora y siempre, en permanente correlación con la reproducción de los fundamentos materiales e ideales de la vida social(: 29)

De acuerdo con los postulados de la teoría de la actividad (Davydov, 1999; Leóntiev, 1987; Vygotsky, 1978 y Reverand, 2002), la Matemática solamente será entendida, aprendida y dominada por la mayoría de las personas, siempre que su relación con ellas esté basada, en primer lugar, en el trabajo activo, participativo y significativo de los sujetos actores en el proceso educativo (Freire, 1996 y Vigotsky, 1978), y en segundo lugar como parte de la estructura formativa general básica de todo ser humano (Freire, 1973 y Heymann, 1996). Aunque ambos principios se conectan dialécticamente, el primero está referido especialmente a los métodos, las técnicas y las actividades de aprendizaje y enseñanza en la práctica correcta, mientras que el segundo obedece más a los objetivos de la educación y, muy particularmente, a los objetivos de la Educación Matemática.

El profesor Rico Romero (1997) presenta una profunda reflexión sobre el debate actual en torno a las finalidades de la Educación Matemática: ¿por qué y para qué enseñamos Matemática en las escuelas? Las múltiples respuestas que se han dado a esta pregunta han ido determinando el tipo de currículo matemático que se defiende para las escuelas y desde la sociedad.

Una respuesta habitual es la que viene dada desde presupuestos intrínsecos a la propia disciplina. Las metas y objetivos vienen definidos en función de la propia matemática y su valor como potenciación del pensamiento racional. Esta aproximación epistemológica al currículo matemático deriva en una organización curricular desde la propia estructura interna de la Matemática. Los objetos de estudio son objetos matemáticos.

Desde el sentido de la formación obligatoria, el significado que tiene para el sujeto la elaboración de un conocimiento matemático es su utilidad para afrontar, interpretar y actuar sobre las diversas situaciones de la realidad socio- natural, sin menoscabar el potencial formador de su propio proceso de elaboración. Los estudiantes de la escuela básica no se van a convertir todos en matemáticos, desde su formación obligatoria necesitan muchas cosas más que una colección de conceptos abstractos y procedimientos algorítmicos, hay que introducirles en el uso de las herramientas conceptuales y procedimentales matemáticas, validas para la actividad desarrollada en la vida real.

Pocos son los educadores matemáticos que discuten hoy la idea de que la matemática es una parte necesaria de nuestra cultura y que es algo que posibilita al individuo un mayor dominio de los elementos que intervienen en la sociedad. Como ya indicaba D'Ambrosio (1985) hace muchos años, la educación matemática tiene fundamentalmente un objetivo: desarrollar estrategias intelectuales que permitan la construcción de una matemática como cuerpo de conocimiento, de técnicas y procedimientos útiles para satisfacer las necesidades sociales.

En esta idea está todo el potencial de la enseñanza de la Matemática. Por un lado, la Matemática es un elemento esencial de la comunicación al ser un lenguaje preciso, universal y útil para modelar el mundo real, forma parte de un gran cuerpo de modelos de pensamiento y de lenguaje para simular los fenómenos reales. Por ello, las alumnas y los alumnos deben acceder a los instrumentos matemáticos utilizados socialmente, a sus significados y a sus relaciones, lo cual representa su finalidad utilitaria o pragmática (Niss, 1995, Rico Romero, 1997).

Pero, por otro lado, su propio proceso de elaboración promueve el uso de esquemas, de representaciones y modelos de los patrones y regularidades que se observan en el entorno, potencia el razonamiento y una forma de pensamiento potente para formular, identificar y resolver problemas del entorno. Es decir, determinadas formas de la actividad matemática favorecen el desarrollo y la adquisición de capacidades intelectuales. Representa su finalidad formativa (Niss, 1995 y Rico Romero, 1997).

Ambas finalidades inciden en la necesidad de salir de esa visión endogámica del currículo y enfocar la Matemática escolar desde presupuestos que sitúen el énfasis en objetivos socioculturales y formativos. Para ello, es necesaria una nueva forma de abordar el currículo escolar que refleje el nivel de incertidumbre presente en la vida y que genera la imposibilidad de alcanzar siempre una única respuesta, válida y verdadera para los múltiples problemas que surgen en una realidad compleja en la que interrelacionan diferentes dimensiones. No cabe duda que, "el mundo en el que nos ha tocado vivir es ya un mundo global en el que todo está relacionado, ninguno de los ámbitos de relación pueden ser adecuadamente comprendidos al margen de los demás" (Torres, 1994, 31).

Los conocimientos disciplinares siempre indican aspectos y dimensiones diferentes, como focalizaciones de determinadas características de la realidad, pero en si mismas complementarias. Su forma de adquisición depende de la perspectiva de cómo enseñarlo, si ésta no es integradora estaremos fomentando la adquisición de un conocimiento parcelado y fragmentario, inútil para afrontar la complejidad de los problemas del entorno (Martínez, 1993).

Hoy las niñas, niños y adolescentes tienen una percepción muy diferente del tiempo, del espacio y de las relaciones que en ellos se dan, que en nada coinciden con los presupuestos de hace 20 años. Sus necesidades y expectativas se desarrollan hoy por caminos muy diferentes y muy condicionados por el medio donde se muevan (Pérez, 1994). Desde dicha consideración, probablemente es difícil justificar el sentido de enseñar Matemática desde los mismos presupuestos, métodos y modelos superados en casi todos los ámbitos de nuestra sociedad actual.

Si los problemas que interesan a la ciudadana y al ciudadano de hoy están relacionados con su entorno cultural, social y natural y, por tanto, tan alejados de los que tuvieron que afrontar los grandes pensadores como Euclides, Newton o Descartes, posiblemente el tipo de Matemática que ellos desarrollaron no tiene por qué ser útil tal cual para dar respuestas adecuadas a los problemas actuales, para los cuales serán necesarios otros instrumentos, materiales e intelectuales más cercanos a los disponibles hoy en día. Dicho de otra manera, si nos enfrentamos a nuevos problemas quizás sean necesarias nuevas formas de hacer Matemática, no atadas al paradigma mecanicista y reduccionista dominante en nuestra sociedad y que tan poco resultado ha tenido en el ámbito educativo.

Las ciudadanas y los ciudadanos del siglo XXI necesitarán de una *nueva Matemática* para tratar con los *nuevos y viejos problemas*. La Matemática relevante para estos problemas tiene que ser desarrollada desde visiones alternativas que no tienen por qué coincidir con la visión tradicional y disciplinar de la Matemática.

Organizar el currículo matemático, de forma que sea adecuado para el tratamiento de los problemas de naturaleza global y compleja con los que nos enfrentamos y permita construir un lenguaje matemático comprensivo y apropiado para afrontar los problemas y situaciones del entorno, sólo es posible desde una forma diferente de entender el conocimiento matemático (D'Ambrosio, 1985). Es necesario, superar la imagen de un conocimiento descontextualizado, fragmentado y jerarquizado, desde la que es difícil establecer lazos de conexión con la vida real.

Las profesoras y profesores de Matemática deben aprender a discutir nexos y relaciones entre las disciplinas, analizar las conexiones de las estructuras conceptuales y procedimientos matemáticos con otras disciplinas, su utilidad y su relación con los problemas del mundo que nos rodea, cómo se puede conducir a las alumnas y a los alumnos y cómo se puede facilitar la elaboración de un conocimiento matemático más holístico y complejo y, por tanto, más válido para su integración en el conocimiento de una ciudadana y de un ciudadano de la sociedad actual. Las profesoras y los profesores han de salir de los muros que ellas mismas y ellos mismos han construido a su alrededor y empezar a observar el entorno educativo real con ojos de aprendices, descubrir las relaciones que tiene con la Matemática y con nuestro quehacer cotidiano, permitir la desaparición de las fronteras y la invasión de los demás y que nuestras clases sean, en verdad, una continuación de la vida (Romberg, 1992).

2.4.- La Matemática: tras un nuevo eje curricular

Al desechar la idea de considerar a la Matemática como eje sobre el cual debe girar el currículo matemático escolar, es necesario determinar un nuevo eje que nos permita construir una nueva organización curricular. En el caso del conocimiento matemático estamos ante un dominio disciplinar que adquiere sentido en su propia capacidad para afrontar y resolver problemas del entorno socio – natural y todos sus conocimientos conceptuales y procedimentales tienen sentido al ser utilizados en los diversos campos del saber. Además, en su origen, la Matemática surge para resolver los problemas que la humanidad se ha ido encontrando y para satisfacer sus necesidades de comprender e interpretar el entorno. Si este ha sido siempre el motor de su desarrollo, es absurdo que en la escuela no quede reflejado.

En las aulas de Matemática, fundamentalmente en la escuela secundaria, el discurso habitual es un discurso directo, unidireccional y expositivo y la actividad matemática se desarrolla en forma individual y en una secuencia repetitiva: explicación – actividades/problemas – comprobación. Problemas que, por otro lado, en la mayoría de los casos son generados desde el propio conocimiento matemático. En otros casos, se desarrollan como paliativo de los problemas del entorno. Estos son como adornar los problemas con hechos del entorno, con concreciones temáticas relacionadas con él, pero con el mismo objetivo matemático y con el mismo papel en la secuencia de aprendizaje. El entorno se convierte en un recurso didáctico. Actividad que puede, en algunos casos, no ser otra que problemas y ejercicios tradicionales con términos y situaciones que utilizan datos y nombres de las informaciones que proceden del medio. A un cierto nivel, esto es un progreso con respecto al tratamiento tradicional totalmente descontextualizado pero es un cambio que no modifica la propia estructura curricular de la matemática escolar, la matemática sigue dirigiendo y organizando dicha estructura.

Hacer Matemática, sin embargo, implica muchas cosas más como, saber formular problemas, interpretarlos, desarrollar un sistema de acciones que permita afrontar los problemas detectados, contrastar ideas, métodos y soluciones, saber comunicar los resultados y extraer conclusiones del proceso de forma clara, rigurosa y precisa. Como numerosas voces lo reivindican en especial Cockroft (1985), Schoenfeld (1985), Romberg (1992), Azcárate y Cardeñoso (l994) y Rico Romero (1997), la resolución de problemas debería ser el eje en torno al cual articular el currículo matemático, los contenidos y las actividades desarrolladas en el aula. Pero, no nos referimos a problemas típicos matemáticos seleccionados y desarrollados desde la lógica matemática, con datos de la realidad en algunos casos pero, con una estructura sintáctica que sólo es común a los propios enunciados matemáticos, sino a problemas reales del entorno en los que ineludiblemente para su formulación, caracterización, análisis, interpretación y resolución sean necesarios conceptos y procedimientos matemáticos.

La clave está en aprender a establecer relaciones, afrontar unos determinados problemas de estudio, estructurar las actividades de tal forma que facilite progresivas aproximaciones a los fenómenos sociales, naturales y personales y que permita comprender mejor e intervenir en el complejo mundo en el que vivimos. Esto supone un cambio de la perspectiva con la que los sujetos deben acercarse al conocimiento matemático, alejada de la lógica disciplinar, una lógica que permita romper las fronteras establecidas entre las disciplinas y que lleve al individuo hacia una visión global de los problemas y del mundo.

Todo conocimiento escolar se articula en torno a un conjunto de objetos de estudio a trabajar en el aula, del cambio en la organización de esos objetos de estudio es de lo que estamos hablando. El conocimiento matemático escolar es de naturaleza peculiar, diferente del conocimiento disciplinar de la Matemática y diferente del conocimiento heurístico que procede de la interacción con el entorno y ello condiciona su selección y organización que debe estar regida por indicadores diferentes más cercanos al desarrollo del individuo (Blanco, 1996).

La dificultad está en llegar a comprender y diferenciar entre trabajar con temas y problemas matemáticos aunque sea a través de estrategias metodológicas innovadoras y trabajar con problemas de la vida real que, por un lado, den sentido al proceso y, por otro, impliquen y necesiten del conocimiento matemático para su comprensión y resolución. Como indicaba Schoenfeld (1985), es necesario generar una práctica matemática, enseñar a las alumnas y a los alumnos cómo pensar matemáticamente sobre el mundo, cómo ver el mundo con ojos matemáticos (¿tiene alguna explicación que los panales sean de forma hexagonal? y ¿por qué la concha del caracol tiene forma helicoidal?) y cómo utilizar las herramientas matemáticas para precisar mejor la caracterización de los objetos del entorno.

Las ideas matemáticas no tienen entidad propia fuera del contexto en que se utilizan y adquieren significado en las mentes de las alumnas y de los alumnos al ser aplicadas en diferentes situaciones y actividades. Los propios conocimientos matemáticos evolucionan con el uso, es ineludible su utilización en nuevas situaciones y problemas que conlleven nuevos datos o estructuras para una completa comprensión de su significado. Como indican Brown, Collins y Duguid (1989), es necesario contextualizar el conocimiento matemático como vía de percibir lo global y la complejidad de los problemas y para ser afrontados no desde la perspectiva parcelada y compartimentada típica de la disciplinariedad sino desde la perspectiva global propia de la interdisciplinariedad.

Las actividades y situaciones propuestas en el aula han de permitir a la alumna y al alumno situarse en los diferentes temas y formular sus puntos de vista, por ello es importante que las situaciones sean accesibles y próximas a su vida cotidiana. La mayoría de las alumnas y de los alumnos tienen un alto interés por los problemas del entorno y del ambiente, ello puede ser también una buena razón para ser considerados como eje del aula de Matemática (Azcárate, 1997).

Las y los profesionales de la Educación Matemática deberían invertir parte de sus esfuerzos en hacer una caracterización y clasificación de los conflictos, problemas, situaciones o dilemas del entorno social, cultural y natural en relación con su implicación matemática. Ello permitiría reconocer el conocimiento matemático como instrumento para analizar, representar, explicar, predecir e intervenir en la realidad, valorando su uso para facilitar una mejor comprensión del medio. Y así, organizar el conocimiento matemático en torno a problemas o a temáticas que tengan sentido para los estudiantes que les potencie el proceso de indagación y que conecte con lo que ellos ya saben. Explica Azcárate, (1997)

> Desde una perspectiva integradora, el currículo matemático vendría determinado y organizado en torno a una red de problemas, problemas potenciales que permitan la comprensión e interacción en la realidad social, cultural, política y natural. Entendiendo por problemas todos aquellos temas que interesan, preocupan o son un obstáculo para la alumna y el alumno y que están relacionados con diferentes aspectos del entorno. Los grandes núcleos de problemas estarían relacionados con:
>
> Energías alternativas, fuentes y escasez de energía, gastos energéticos.
>
> Crecimiento de la población – producción de alimentos; relación hambre en el mundo y fuentes de alimentos.
>
> Ciclo de agua, fuente y consumo de agua.
>
> Parcelación del terreno, uso de pesticidas, concentraciones limite en función de las especies del entorno, herbicidas, fertilizantes por metro cuadrado y su porcentaje.
>
> Calidad del aire y la atmósfera, el uso racional del planeta.
>
> Análisis del consumo, sus excesos y sus consecuencias.
>
> Calidad de vida, características y condiciones del entorno.
>
> Salud y enfermedades humanas, dietas equilibradas, estudios epidemiológicos, factores hereditarios.
>
> Y otros muchos como astronomía, guerra tecnológica, diferencias ciudad /provincia,... (:83 y 84)

Temas cuyo estudio es factible de ser tratado matemáticamente, que necesitan para su comprensión de conocimientos matemáticos como cálculos numéricos, estudio del espacio, representaciones, porcentajes, proporciones, análisis estadístico, estimaciones probabilísticas, relaciones de equilibrio estable e inestables, métodos de agrupar, organizar e interpretar información, representar y comunicar datos, etc. Son temas que presentan características matematizables en su formulación y/o resolución, sin las cuales el conocimiento del entorno es parcial y la capacidad de intervención en él, muy reducida (Azcárate, 1997).

Por ejemplo, hacer un estudio sobre los niveles de consumo y sus implicaciones en nuestra sociedad, obliga necesariamente a diseñar un sistema de actividades que ponga en juego procedimientos de recogida y organización de información , hacer cálculos del consumo medio por ciudadano o por familia, en medio urbano o rural, su distribución, utilizar estrategias de cálculo, medida y estimación para analizar y representar el uso adecuado o indiscriminado de los bienes materiales, sintetizar la información para comunicar los datos obtenidos, interpretarlos y extraer conclusiones orientadas a la intervención, etc.

Datos que, a su vez, se pueden usar a la hora de analizar la calidad de vida del ciudadano en nuestro entorno. Para ello, también será necesario recoger, clasificar y organizar la información sobre datos económicos, fiscales, urbanísticos, laborales, culturales, etc. Investigar sobre los aspectos que puedan mejorar la calidad de vida de los ciudadanos, supone construir conceptos y estrategias matemáticas como interpretar el lenguaje numérico o gráfico, realizar medidas y cálculo directos e indirectos, establecer relaciones de proporcionalidad, modelar situaciones, establecer dependencias funcionales, elaborar procedimientos de representación, etc, pero no con un objetivo en sí mismos, sino para un mejor análisis y comprensión de estos u otros problemas de nuestro entorno.

Preparar a las alumnas y a los alumnos para poder dar respuestas a los problemas integrados en cada núcleo nos permitiría estructurar el currículo matemático en torno a conjuntos de problemas en cuya resolución podrían intervenir conocimientos matemáticos diversos, de diferentes niveles y naturaleza, pero cuya total resolución no dependería solo de la Matemática sino de la información aportada por otros tipos de conocimientos. Evidentemente, en el estudio de cualquier tema ambiental están involucradas no sólo la Matemática sino gran parte de otras ciencias lo que nos lleva a pensar que el estudio de los hechos del entorno son un instrumento o un medio para avanzar hacia la integración de las ciencias y de la Matemática. Los núcleos indicados son sólo un ejemplo que, en todo caso, será necesario desarrollar, pero hay numerosos hechos del entorno que se pueden elegir como fuente de problemas para el aula.

Enseñar Matemática puede y debe ser compatible con formar personas. Las profesoras y los profesores de Matemática deben ser capaces de seleccionar y organizar los contenidos y actividades más adecuadas para contribuir al desarrollo personal de las alumnas y de los alumnos, capacitándolos autónoma, social, crítica y responsablemente (Azcárate, 1997)

2.5.- Resolución de problemas

György Pólya (1887-1985)

Fuente: www.amt.canberra.edu.au/polya.html

¿Qué se entiende por problema? y ¿Qué se entiende por resolución de problemas? Son interrogantes que algunas investigadoras y algunos investigadores han pretendido responder desde diferentes perspectivas. La palabra problema tiene múltiples acepciones, "podría ser definido genéricamente como cualquier situación previa o espontánea que produce, por un lado un cierto grado de incertidumbre y por otro, una conducta tendiente a la búsqueda de la solución" (Perales, 2000, 170). Según el Larousse (1984,840) una de ellas es "cuestión que se trata de resolver por medio de procedimientos científicos", también "Proposición dirigida a averiguar el modo de obtener un resultado, conociendo ciertos datos", en tercer lugar "Cosa difícil de explicar (...). Sinónimo: Enigma" y por último: "Asunto difícil, delicado, susceptible de varias soluciones".

Una de las primeras cosas que debe hacer toda y todo docente es diferenciar los problemas de los ejercicios. El problema se refleja si los que han de responder las preguntas no deben conocer las respuestas, ni disponer de un procedimiento algorítmico mediante el cual puedan determinarlas inmediatamente. Para Pomés (1991)

> la diferencia esencial entre ejercicios y problemas viene dada por exigir estos últimos el aporte por parte del sujeto de algo nuevo, desconocido hasta entonces. Por el contrario, un ejercicio no supone sino una aplicación de lo ya conocido a un ejemplo más. Para resolver un problema, la alumna y el alumno deben esforzarse en una interacción entre la pregunta y el intento individual de responder a esa pregunta, tensión mediante la cual se puede lograr que aflore una aportación nueva, desconocida al inicio. (:79)

Por otra parte Gagné (citado por Perales, 2000), comenta que la palabra resolución se refiere a la actividad de resolver el problema; es decir, el proceso a través del cual se clarifica la situación incierta, aplicándose en este proceso diversos conocimientos y procedimientos por parte del solucionador.

Particularmente, en el ámbito de la Educación Matemática la palabra problema es utilizada *"para designar cuestiones de diversa naturaleza a la que debe responder el alumno [...], reúne actividades que se proponen a los estudiantes persiguiendo distintas finalidades cuya resolución exige aplicar diferentes conocimientos, habilidades y capacidades que normalmente forman parte de la programación de Matemática"* (Callejo, 1994, 22).

En las últimas décadas, diversas investigadoras y diversos investigadores han enfocado sus estudios sobre los factores que intervienen en la actividad de resolución de problemas, sobre la base de diferentes modelos o teorías de aprendizaje, fundamentadas en ciertas concepciones de lo que es un problema y el papel que éstos juegan dentro de esos modelos de aprendizaje.

Kilpatrick (1982) plantea que existen diferentes perspectivas o puntos de vista en relación con lo que es un problema y específicamente un problema de Matemática:

- El primer punto de vista, nos presenta el problema como esencia y estructura de la matemática.

Esto está fundamentado en la concepción de que la Matemática es para algunas y algunos creada (mientras que para otras y otros es descubierta) en el proceso de formular y resolver problemas. Por ejemplo, problemas matemáticos famosos como la cuadratura del círculo, la duplicación de cubo, la trisección de un ángulo arbitrario, los problemas que Hilbert planteó en el Congreso Internacional de Matemática en 1900 y así sucesivamente, ha sido fuente de estímulo para la investigación matemática y han contribuido de manera significativa en su desarrollo.

Por otra parte, se comenta que cuando una persona soluciona un problema somete éste a procesos parecidos de formulación y reformulación como los utilizados en la construcción de Matemática. Para esos procesos se requiere la habilidad de penetrar en el interior o estructura del problema. Dicha estructura es la que establece las similitudes e igualdades que pueden existir entre diversos problemas. De manera que, identificar la estructura de un problema puede ayudar a encontrar su solución. Entonces, se recomienda que tanto las maestras y los maestros como las y los estudiantes tomen en cuenta este punto de vista para la resolución de problemas.

- El punto de vista curricular, plantea el problema como vehículo pedagógico.

Desde esta perspectiva Pólya (1981) distingue cuatro tipos de problemas:

1) Problemas que se solucionan con la aplicación mecánica de una regla o procedimiento que acaba de ser presentado o estudiado.
2) Problemas, donde el resolvedor debe hacer uso de su propio criterio para elegir la regla o los procedimientos dados antes en clase para obtener su solución.
3) Problemas que requieren (por parte del resolvedor) una combinación de reglas o ejemplos previamente estudiados.
4) Problemas cuya resolución requiere de una combinación original de reglas y procedimientos, pero además del uso de un razonamiento plausible.

2.6.- Modelación Matemática[4]

Muchas situaciones del mundo real pueden presentar problemas que requieran soluciones y decisiones. Algunos de estos problemas tienen un aspecto matemático relativamente simple, involucrando una matemática básica, como por ejemplo:

- El tiempo necesario para recorrer una distancia de 40 kilómetros, manteniendo la velocidad del vehículo en 80 kilómetros por hora;
- El interés que cobra una institución financiera por un determinado préstamo;
- El área de un terreno de forma rectangular.

Otros problemas, camuflados en una determinada área del conocimiento, necesitan un análisis más preciso de las variables involucradas, como:

- La mejor manera para reducir el retrabajo en una fábrica;

[4] Tomado parcialmente del artículo **Modelación matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas** de María Salett Biembengut y Nelson Hein, publicado en la revista Educación Matemática de 1999

- La cantidad permitida y el periodo apropiado para la caza de un animal predador sin que esto interfiera en el ecosistema.

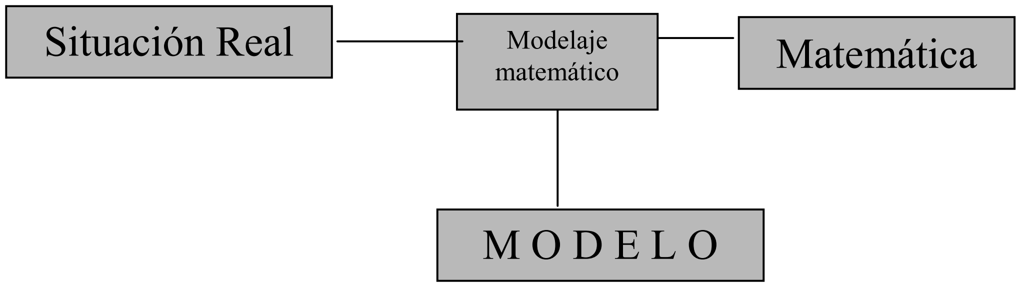
Cualquiera que sea el caso, la solución de un problema requiere una formulación matemática detallada. Un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna manera, un fenómeno en cuestión o problema de situación real, se le denomina Modelo matemático. En la ciencia, la noción de modelo es fundamental para la construcción y expresión del conocimiento. En especial, la matemática permite la elaboración de modelos que posibilitan una mejor comprensión, simulación y previsión del fenómeno estudiado.

Un modelo puede ser formulado en términos familiares, tales como: expresiones numéricas o fórmulas, diagramas, gráficos o representaciones geométricas, ecuaciones algebraicas, tablas, programas computacionales, etc. Por otra parte, cuando se propone un modelo, éste proviene de aproximaciones realizadas para poder entender mejor un fenómeno, sin embargo, no siempre tales aproximaciones están de acuerdo con la realidad. Sea como sea, un modelo matemático retrata, aunque con una visión simplificada, aspectos de la situación investigada.

2.6.1.- Modelaje matemático

Modelaje matemático es el proceso involucrado en la obtención de un modelo. Este proceso, desde cierto punto de vista, puede ser considerado artístico, ya que para elaborar un modelo, además del conocimiento profundo de matemática, el modelador debe tener una dosis significativa de intuición-creatividad para interpretar el contexto, discernir qué contenido matemático se adapta mejor y sentido lúdico para jugar con las variables involucradas. Las formulaciones, resoluciones y expresiones creadas deberán servir no sólo para una solución particular, sino también, posteriormente, como soporte para otras aplicaciones y teorías.

A grosso modo, podríamos decir que matemática y realidad son dos conjuntos disjuntos y el modelaje es un medio de vincularlos. El siguiente esquema (121), representa esta propuesta:



Actualmente, este proceso es usado en toda la ciencia, y ha contribuido a la evolución del conocimiento humano. Sabemos que la matemática se está usando en los fenómenos microscópicos en tecnología y también en los macroscópicos cuando se pretende conquistar el universo.

El modelaje matemático, ciertamente, no es una idea nueva. Su esencia estuvo presente en la creación de las teorías científicas y, en especial, en la creación de las teorías matemáticas. A inicio del siglo XX fue muy utilizado en la resolución de problemas de biología y economía. Durante la Segunda Guerra Mundial, por ejemplo, intentos de resolver cuestiones de defensa y ataque propiciaron el desarrollo de otra ramificación de la matemática-investigación operativa-que posee, hoy en día, extensa aplicación en la industria.

Representar una situación "real" con "instrumental" matemático- modelo matemático – involucra una serie de procedimientos. Identificamos tres etapas en el proceso, subdividas en cinco sub-etapas, a saber:

Tabla 1

interacción con el asunto	reconocimiento de la situación del problema
	familiarización con el asunto a ser modelado (investigación)
Construcción matemática	formulación del problema (hipótesis)
	resolución del problema en términos del modelo
Modelo matemático	Interpretación de la solución (convalidación)

l.- Interacción con el asunto

Una vez delineada la situación que se pretende estudiar, debe hacerse una investigación sobre el asunto, indirectamente (a través de libros y revistas especializadas) y directamente in situ (a través de datos experimentales obtenidos con especialistas del área).

Aunque hayamos subdividido esta etapa en dos sub-etapas, el reconocimiento de la situación – problema se torna cada vez más claro, a medida que se van conociendo los datos.

2.- Construcción Matemática

Esta es la etapa (subdividida en la formulación del problema y solución) más compleja y desafiante. Esta aquí que se da la "traducción" de la situación – problema al lenguaje matemático. Intuición y creatividad son elementos indispensables.

En la formulación del problema es necesario:

- Clasificar las informaciones (relevantes y no relevantes) identificando los hechos involucrados;
- Decidir cuáles son los factores a ser perseguidos – formulando hipótesis;
- Seleccionar símbolos apropiados para estas variables;
- Describir estas relaciones en términos matemáticos.

Esta sub-etapa debe concluir con un conjunto de expresiones aritméticas y fórmulas, ecuaciones algebraicas, gráficos, representaciones, o programa computacional que lleve a la solución, o que permita la deducción de una solución

En la solución del problema en términos del modelo, la situación para ser resuelta o analizada con el "instrumental" matemático de que se dispone. Esto requiere un agudo conocimiento sobre las entidades matemáticas usadas en la formulación.

La computadora puede ser un instrumento imprescindible, especialmente en las situaciones donde no fuese posible resolver por procesos continuos; de esa manera, se obtienen resultados por procesos discretos.

Cabe aquí destacar que muchos modelos matemáticos no resueltos en el siglo pasado condujeron al desarrollo de otras ramificaciones de la matemática.

3.- Modelo Matemático

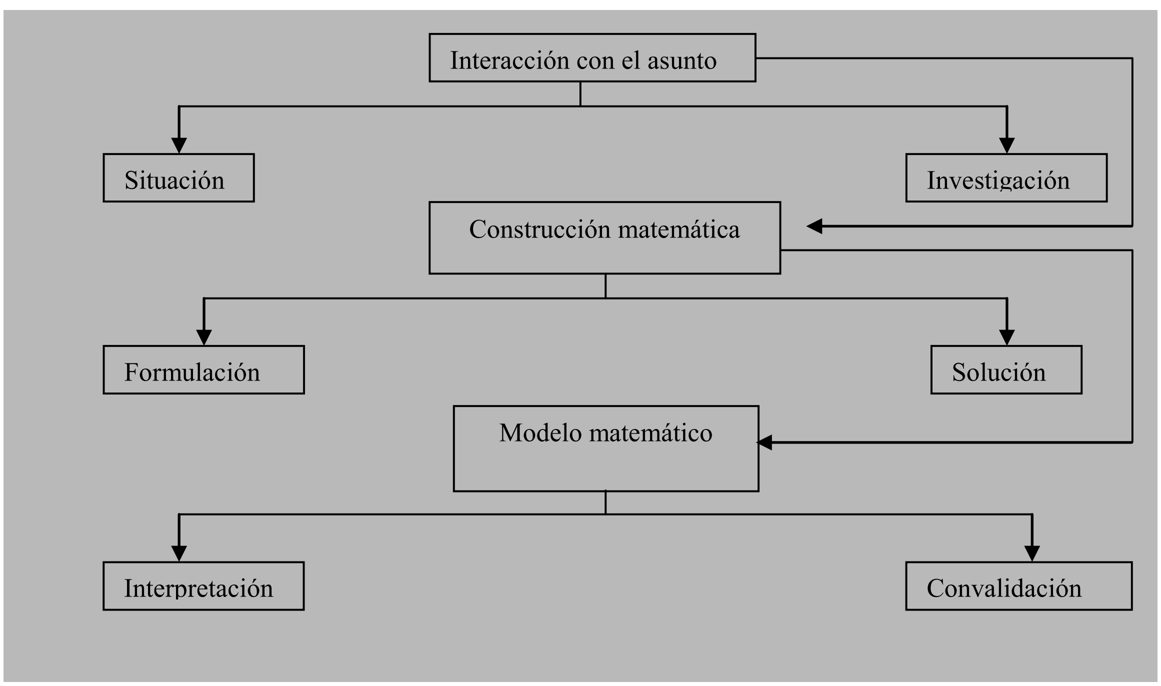
Para poder concluir el modelo, se torna necesario una revisión para así comprobar en qué nivel éste se aproxima a la situación – problema modelado y, a partir de ahí, poder utilizarlo. De esta forma, se hace primero la interpretación del modelo y posteriormente, se comprueba la adecuación – convalidación.

Para interpretar el modelo se analizan las implicaciones de la solución, derivada del modelo que ésta siendo investigado y, entonces, se comprueba la adecuación del mismo, volviendo a la situación problema investigado, evaluando cuan significativa y relevante es la solución.

Si el modelo no atiende a las necesidades que lo generaron, el proceso debe ser retomado en la segunda etapa (construcción matemática), cambiando hipótesis, variables, etc.

Es importante al concluir el modelo, elaborar un informe comunicando todas las facetas del desarrollo, con el fin de propiciar el uso.

El siguiente diagrama (122) representa el proceso en cuestión:



2.6.2.-Modelaje matemático en el proceso de aprendizaje y enseñanza

Desde hace algunos años, se están procesando reestructuraciones en el currículo y métodos de enseñanza de la matemática en muchos países como Holanda y Alemania, con el objetivo primordial de aumentar el interés por la aplicación de ésta en las situaciones cotidianas.

Autores como Bruner (1987,75) sustentan que el aprendizaje no es un mero sumar conocimiento sino un "proceso de crecimiento". "Saber es un proceso y no un producto" (Salett Biembengut y Hein, 1999,123). En este sentido el sistema educativo debe proveer elementos para que el individuo desarrolle sus potencialidades, propiciándole capacidad para pensar crítica e independientemente.

2.7-Análisis de errores matemáticos[5]

El análisis de los errores que se presentan en el aprendizaje de la matemática ha provocado, según Andonegui (1992), el interés de las y los docentes en esta disciplina, de un modo sistemático, desde al menos el comienzo del siglo pasado, coincidiendo con la creación de la Comisión Internacional para la Educación Matemática (ICMI) en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Roma en 1908 (Radatz, 1980). El mismo autor destaca que, a lo largo de estas décadas, han sido cinco los objetivos centrales de este campo de investigación:

- Listar todas las técnicas potenciales de error.
- Determinar la distribución de frecuencias de tales técnicas de error en grupos de diversas edades.
- Analizar algunas dificultades especiales (aritméticas, algebraicas, etc.)
- Determinar la persistencia de tales técnicas individuales de error.
- Intentar clasificar los errores.

Este interés se mantiene aún vigente, prueba de ello es, por poner un ejemplo la presencia de un grupo de trabajo centrado en los errores, en el Séptimo Congreso Internacional sobre Educación Matemática celebrado en Québec (ICMI,1991). Sin embargo, esta misma perspectiva

[5] Parte de este material fue tomado de un trabajo sobre errores escrito por el colega Martín Andonegui y proporcionado a los autores por la profesora Lelis Páez.

histórica muestra que la concepción del papel de los errores en el aprendizaje de la matemática ha evolucionado a lo largo de este tiempo.

El primer contexto de referencia que cabe destacar es el de las teorías conductistas, aunadas a cierta concepción de la Matemática como producto terminado (y no como proceso de desarrollo y formación), con la consiguiente visión de su enseñanza como un proceso prescriptivo de adquisición del conocimiento matemático acabado y unívoco.

En este contexto los errores sólo se caracterizan por su aspecto negativo, ya que representan fracasos en la consecución de la respuesta correcta, única posible en este marco determinista y prescriptivo en que se concibe la enseñanza de la matemática. Y como fracasos, lo único que interesa de los errores no es analizarlos, sino eliminarlos. Para ello se modifican los estímulos y se provee de la suficiente ejercitación, con el fin de hacer desaparecer las respuestas inapropiadas.

Posteriormente, buscando un enfoque más comprehensivo, se configura la denominada teoría del análisis de errores. En este marco de referencia se presuponen ciertas características presentes en los errores cometidos por las alumnas y los alumnos en su aprendizaje de la Matemática (Radatz, 1980; Borasi, 1988):

- Son sistemáticos, responden a ciertas causas y esquemas lógicas subyacentes.
- Son persistentes y estables, y pueden prevalecer durante mucho tiempo.
- Son susceptibles de ser analizados y clasificados en verdaderas *tipologías de errores.*

A partir de estas premisas, la metodología del análisis de errores se centra en los siguientes procesos, según Borasi (1988):

Identificación de los tipos de errores que se presentan en cada área o tópico de enseñanza.

- Determinación de la frecuencia de comisión de tales errores.
- Determinación de la persistencia del error a lo largo del proceso de aprendizaje.
- Identificación y clasificación de las posibles fuentes o causas de tales errores.
- Establecimiento de recomendaciones orientadas al desarrollo de estrategias instruccionales que tengan como objetivo prevenir o remediar tales errores.

- Uno de los factores claves en el contexto metodológico antes señalado es el relativo al proceso de identificación y clasificación de las posibles fuentes o causas de los errores cometidos. En este proceso se da siempre una primera aproximación de carácter local, es decir, ligada al tópico matemático objeto del acto instruccional y al grupo específico de alumnas y alumnos que intervienen en el mismo (Andonegui, 1992).

Se establece como hipótesis la existencia, detrás de cada error, de un conjunto de reglas y convenciones aplicadas sistemáticamente por la alumna y por el alumno (distributividad generalizada y ciertas reglas para la simplificación). De su consideración deriva la existencia de un desconocimiento casi total, por parte de las alumnas y los alumnos, de aspectos fundamentales del lenguaje matemático, desconocimiento que se ubica como causal básica de muchos de los errores cometidos por las alumnas y por los alumnos.

Como es fácil observar no siempre se alcanzan los niveles causales más profundos a la hora de analizar los errores de las alumnas y de los alumnos en el aprendizaje de la Matemática. Lógicamente, depende del nivel de indagación intentado por el investigador. Cuando se hace solamente un análisis post-instruccional de las pruebas escritas de las alumnas y alumnos, comenta Andonegui (1992), no es posible trascender las limitaciones que imponen los propios tópicos matemáticos investigados, en cuanto a posibles fuentes de error:

- Procedimientos equivocados.
- Aplicaciones desacertadas.
- Ausencia de prerrequisitos al tópico específico.

Esta restricción no resta, sin embargo, utilidad a este tipo de indagación, en cuanto permite analizar las metodologías instruccionales utilizadas y los procesos de aprendizaje del tópico, desde el punto de vista de las dificultades que surgen en dichos procesos y dan lugar a los errores detectados.

Para una investigación exhaustiva del génesis del error, es preciso acompañar a la alumna y al alumno en su proceso de reflexión y generación de respuestas. Los planteamientos constructivistas asumen que el conocimiento es activamente construido por el sujeto que conoce y aprende, nunca pasivamente recibido del entorno (Kilpatrick, 1982).

En este marco de referencia, explica Andonegui (1992, 7) el error pierde su estigma negativo y se considera como un resultado emergente de construcciones alternativas de significado realizadas por la alumna y por el alumno, y no como un fallo en el proceso de comunicación docente-alumna o alumno. Por eso no se acentúa su posible carácter disonante, sino el esfuerzo constructivo que representa.

Tabla Nº 2

Brown y Van Lehn "Repair theory"	**Sleeman "Misgeneralization theory"**
Los errores se producen cuando el estudiante encara una tarea que presenta aspectos desconocidos. El impasse que tal situación genera es resuelto por la alumna o alumno mediante la modificación de un procedimiento conocido, que es inmediata e incorrectamente aplicado a dicha tarea.	Los errores se deben a generalizaciones incorrectas de reglas y procedimientos (conmutatividad, distributividad, simplificaciones, etc.), generalizaciones que no surgen de la necesidad de expandir una regla para llenar el vacío ocasionado por un caso desconocido.

Fuente: tomada de Andonegui (2002)

La actitud ante el error no es, en primera instancia, la de eliminarlo, sino la de utilizarlo como punto de partida para un trabajo de investigación y descubrimiento, centrado en el análisis del proceso seguido por la alumna y por el alumno hasta su respuesta errónea, proceso analizado en términos de estrategias cognitivas, metacognitivas y actitudinales. En ocasiones, este análisis lleva a encontrarse con algunos errores que se consideran como caracterizadores de determinadas etapas del desarrollo cognitivo de la alumna y del alumno (Borasi, 1986).

Resulta interesante observar que, en ocasiones, este análisis lleva a encontrarse con algunos errores que se consideran como caracterizadores de determinadas etapas del desarrollo cognitivo de la alumna y del alumno (Borasi, 1986). Tal es el caso de las conductas que revelan ausencia de conservación de algunas magnitudes (masa, longitud, área, volumen, etc.). Tales errores son considerados como pasos normales e incluso necesarios en el desarrollo cognitivo del sujeto.

En el momento actual, la mayor parte de los especialistas, según Mulhern (1989), coinciden en considerar como características generales de los errores cometidos por las alumnas y por los alumnos los siguientes:

- Los errores son sorprendentes. Con frecuencia los errores cometidos por las alumnas y por los alumnos surgen de manera abrupta, ya que por lo general se han mantenido ocultos para la profesora o para el profesor durante algún tiempo.
- Los errores son a menudo extremadamente persistentes, debido a que pueden reflejar el conocimiento de las alumnas y de los alumnos sobre un concepto o un uso particular de reglas mnemotécnicas. Son resistentes a cambiar por sí mismos ya que la corrección de errores puede necesitar de una reorganización fundamental del conocimiento de las alumnas y de los alumnos.
- Los errores pueden ser o bien sistemáticos o por azar. Los primeros son mucho más frecuentes y, por lo general, más efectivos para revelar los procesos mentales subyacentes; estos errores se toman como síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada subyacente, que el estudiante considera y utiliza como correcto. Los errores por azar reflejan falta de cuidado y lapsus ocasionales, y tienen relativamente poca importancia.
- Los errores ignoran el significado; de este modo, respuestas que son obviamente incorrectas, no se ponen en cuestión. Las alumnas y los alumnos que cometen un error no consideran el significado de los símbolos y conceptos con los que trabajan.

Dr. Jeremy Kilpatrick
Fuente:wilson.coe.uga.edu/DEPT/
math/GradCoord/KilpatHomePg.html

Jean Piaget (1896-1980)
Fuente: www.abrae.com.br/entrevistas/
entrevistas.htm

Brousseau, Davis y Werner (1986) señalan cuatro vías mediante las que el error puede presentarse:

- Los errores son a menudo el resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.
- Frecuentemente los errores se presentan como resultado de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por la profesora o el profesor.
- También los errores pueden presentarse cuando la alumna o el alumno utiliza procedimientos imperfectos y posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por la profesora y por el profesor.
- Las alumnas y los alumnos con frecuencia inventan sus propios métodos, no formales pero altamente originales, para la realización de las tareas que se les proponen y la resolución de problemas.

Radatz (1980) realiza una clasificación de errores a partir del procesamiento de la información y establece cinco categorías generales:

1) Errores debidos a dificultades de lenguaje. Señala que el aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchas alumnas y alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores, por ello, la resolución de problemas verbales está especialmente abierta a errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.
2) Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Aunque se trata de un campo de estudio cuyo desarrollo se está iniciando, es cierto que las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales, es una fuente de dificultades para muchos jóvenes y niños en la realización de tareas matemáticas. Algunas representaciones icónicas de situaciones matemáticas pueden suponer dificultades en el procesamiento de la información; el

análisis y síntesis perceptivos implican una demanda considerable para algunas alumnas y alumnos, presentando dificultades y produciendo errores.

3) Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

4) Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. En estos casos las alumnas y los alumnos desarrollan operaciones cognitivas, que continúan empleando aún cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se hayan modificado. Persisten en la mente algunos aspectos del contenido o del proceso de solución, inhibiendo el procesamiento de nueva información. Dentro de esta clase de errores se encuentran los siguientes:

   - Errores por perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.
   - Errores de asociación, que incluyen interacciones incorrectas entre elementos singulares.
   - Errores de interferencia, en los que las operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
   - Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura.
   - Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas, en las que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas verbales.

5) Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Este tipo de errores surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

En una investigación más reciente sobre errores cometidos por alumnas y alumnos de secundaria en Matemática, Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de las alumnas y alumnos realizadas por expertas y expertos.

De acuerdo con la metodología propuesta determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados. Estas categorías son:

I) Datos mal utilizados.
II) Interpretación incorrecta del lenguaje.
III) Inferencias no válidas lógicamente
IV) Teoremas o definiciones deformados
V) Errores técnicos
VI) Falta de verificación en la solución

Tabla 3: Clasificación de errores según Movshovitz-Hadar, Inbar y Zaslavsky (1987)

Clasificación		Casos
RAZONAMIENTO ILÓGICO	I) Datos mal utilizados	Se incluyen aquí aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado la alumna o alumno. Dentro de este apartado se encuentran los casos en los que: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.
	II) Interpretación incorrecta del lenguaje	Se incluyen en este caso los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto. Esto ocurre al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada; también cuando se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del usual y operando con él según las reglas usuales; a veces se produce también una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.
	III) Inferencias no válidas lógicamente	Esta categoría incluye aquellos errores que se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico. Encontramos dentro de esta categoría aquellos errores producidos por: derivar de un enunciado condicional su recíproco o su contrario; derivar de un enunciado condicional y de su consecuente, el antecedente; concluir un enunciado en el que el consecuente no se deriva del antecedente, necesariamente; utilizar incorrectamente los cuantificadores; o también, realizar saltos injustificados en una inferencia lógica.

CALCULO INCORRECTO	IV) Teoremas o definiciones deformados	Se incluyen aquí aquellos errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable. Tenemos en este caso la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias; aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal; realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula reconocibles.
	V) Errores técnicos	Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.
RESULTADO MALO	VI) Falta de verificación en la solución	Se incluyen aquí los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si el (la) resolutor/a hubiese contrastado la solución con el enunciado el error habría podido evitarse.

"No existe un método científico como tal. El rasgo distintivo más fértil de proceder del científico ha sido el utilizar su mente de la mejor forma posible y sin freno alguno"

Percy Williams Bridgman (1882-1961)
Premio Nobel de Física

Capítulo 3: Aspectos Metodológicos

3.1.-Consideraciones generales

En toda investigación científica se hace necesario que los hechos estudiados, las relaciones que se establecen entre éstos, los resultados obtenidos, las evidencias significativas encontradas en el problema investigado y los nuevos conocimientos, reúnan las condiciones de fiabilidad, objetividad y validez interna. Para lograrlo se requiere delimitar los procedimientos de orden metodológico, a través de los cuales se intenta dar respuestas a las interrogantes objeto de investigación. En consecuencia, la metodología de la presente investigación es la instancia que alude al momento tecno-operacional presente en todo proceso de investigación, donde es necesario situar al detalle, el conjunto de métodos, técnicas y protocolos instrumentales que se emplearán en el proceso de recolección de los datos requeridos en la investigación propuesta.

Destaca en esta dirección, que en función de las características derivadas del problema investigado y de los objetivos delimitados al inicio de la misma, se introducirán, anticipadamente, los diversos procedimientos tecno-operacionales más apropiados para recopilar, presentar y analizar los datos, con la finalidad de cumplir con el propósito general de la investigación planteada. En tal sentido, se desarrollarán importantes aspectos relativos al tipo de estudio y a su diseño de investigación, incorporados en relación con los objetivos establecidos, que en este caso, se trata de una investigación descriptiva; el universo o población estudiada, así como, el número total de sujetos que la integran; la muestra que se utilizará y cómo fue seleccionada; las técnicas instrumentos que se emplearán en la recolección de los datos y las características esenciales de los mismos.

Las formas de codificación, presentación de los datos y el análisis e interpretación de los resultados, permitirá destacar las evidencias más significativas encontradas en relación con el aprovechamiento matemático que los alumnos han adquirido y aplican.

3.2.-Tipo de investigación

De acuerdo con el problema planteado y en función de sus objetivos, se incorpora el tipo de investigación denominado Proyecto Descriptivo el cual consiste en describir situaciones y eventos relacionados con el problema. Esto significa decir *cómo es* y *cómo* se manifiesta determinado fenómeno. Con este estudio descriptivo se busca especificar las propiedades importantes de la comunidad estudiantil que es sometida al análisis y así orientar la investigación a resolver el problema planteado que es de interés nacional.

En atención a esta modalidad de investigación, y con el fin de cumplir con los requisitos involucrados en este proyecto, inicialmente se realiza un diagnóstico para intentar captar, reconocer y evaluar sobre el terreno, los componentes y relaciones que se establecen en la situación estudiada. El propósito es lograr la verdadera comprensión y avanzar en la resolución para poder determinar o proponer los cambios que dieran lugar. Una vez hecho el diagnóstico, se podrá establecer un pronóstico de la situación o hecho estudiado, y en tal sentido será de gran valor práctico para resolver el problema.

3.3.- Diseño de investigación

En el marco de la investigación planteada, se define el diseño de investigación como el plan o estrategia global en el contexto de estudio propuesto, que permite orientar desde el punto de vista técnico, y guiar todo el proceso de investigación desde la recolección de los primeros datos, hasta el análisis e interpretación de los mismos en función de los objetivos definidos en la presente investigación. Atendiendo a los objetivos delimitados de manera primaria, la investigación se orienta hacia la incorporación de un diseño de campo. Por cuanto este diseño de investigación permite no solo observar, sino recolectar los datos directamente de la realidad objeto de estudio en su ambiente cotidiano, para posteriormente analizar e interpretar los resultados de estas indagaciones.

El estudio propuesto se adecua a los propósitos de la investigación no experimental descriptiva, donde no se han planteado hipótesis. Se trata de un estudio descriptivo, en la medida que el fin último es el de describir con precisión las características del análisis que pone de manifiesto en los jóvenes de 8vo grado de Educación Básica y los del Semestre Introductorio de la Licenciatura en Ciencias Fiscales de la Escuela Nacional de Administración y Hacienda Pública- Instituto Universitario de Tecnología, conocimientos que han adquirido y que aplican para resolver situaciones de la vida cotidiana.

Definido así el estudio, el diseño de investigación del presente trabajo es del tipo transversal; tal como lo plantean Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio (1991, 186) en su obra Metodología de la Investigación "Los diseños de investigación transeccional o transversal recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único. Su propósito es describir variables, y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado"

3.4.-Universo de estudio

En la presente investigación, las unidades de análisis objeto de observación o estudio son alumnos del 8vo grado de Educación Básica de las unidades educativas del área metropolitana de Caracas del turno matutino durante el año escolar 1999-2000 y los alumnos del Semestre Introductorio de la Licenciatura en Ciencias Fiscales de la Escuela Nacional de Administración y Hacienda Pública durante el período comprendido entre los meses de agosto y diciembre de 2001.

3.5.- Muestra de estudio

La selección de la muestra en un estudio etnográfico requiere que el investigador especifique con precisión cuál es la población relevante o el fenómeno de investigación (Martínez, 1994). Los tipos de muestras, según Martínez (1994) son, básicamente, dos: la muestra estadística o probabilista y la muestra intencional o basada en criterios. La muestra intencional se deriva según una serie de criterios que se consideran necesarios o muy convenientes para tener una unidad de análisis con las mayores ventajas para los fines que persigue la investigación. Dicha muestra debe hacer énfasis en los casos más representativos y paradigmáticos.

Para cumplir con el propósito de la investigación se tomó una muestra intencional de estudiantes de 8º grado de la III etapa de Educación Básica del periodo escolar 1999-2000 y una sección del Semestre Introductorio de la Licenciatura en Ciencias Fiscales de la Escuela Nacional de Administración y Hacienda Pública- Instituto Universitario de Tecnología.

El número de alumnas y alumnos seleccionados fue de 170 pertenecientes a tres escuelas básicas del Oeste de Caracas, los cuales a su vez formaban seis secciones del respectivo grado y 15 de una sección del Semestre Introductorio de la Licenciatura en Ciencias Fiscales de la Escuela Nacional de Administración y Hacienda Pública. A las alumnas seleccionadas y a los alumnos seleccionados se les aplicó una prueba de desarrollo de conocimientos y a sus profesoras y profesores se les hizo una entrevista semi estructurada que les permitió hablar libremente sobre el problema planteado. Por lo regular, cuando la muestra es intencional, el enfoque de la investigación no tiene pretensiones de generalizar sus conclusiones respecto a un universo de estudio predelimitada, sino que más bien, desea explorar resultados y ofrecer sugerencias para instaurar cambios en una institución, en una empresa o en una comunidad particular.

3.6.- Instrumentos de recolección de información

Muchos de los problemas que surgen en la investigación científica no se pueden resolver sino mediante la utilización de instrumentos de muestreo. Puesto que la mayoría de los fenómenos educacionales, comentan Van Dalen y Meyer (1981) abarcan un gran número de unidades, el investigador no siempre puede entrevistar, administrar tests u observar a cada una de ellas, en condiciones controladas. Gracias a los instrumentos de muestreo es posible resolver este problema, pues ayudan al investigador a seleccionar las unidades representativas, a partir de las cuales podrá obtener datos que le permitan extraer inferencias acerca de la naturaleza de la población total. Los instrumentos de muestreo ahorran tiempo, dinero y energías y proporcionan los medios para indagar problemas que resultan difíciles de encarar mediante los métodos convencionales.

El presente trabajo analiza indicadores de los conocimientos matemáticos que han adquirido y aplican los estudiantes de 8vo grado de Educación Básica y del Semestre Introductorio de la

Licenciatura en Ciencias Fiscales de la Escuela Nacional de Administración y Hacienda Pública-Instituto Universitario de Tecnología, para resolver situaciones de la vida cotidiana ubicado dentro de la modalidad de los denominados proyectos descriptivos. Se emplearán una serie de instrumentos y técnicas de recolección de la información, orientadas de manera esencial para alcanzar los fines propuestos. Para esta estrategia, necesariamente hay que cumplir con ciertas fases básicas, la primera de ellas está referida a la delimitación de todos los aspectos teóricos de la investigación, vinculadas a la: formulación y delimitación del problema objeto de estudio, elaboración del Marco Teórico y las otras fases están vinculadas con el análisis mencionado.

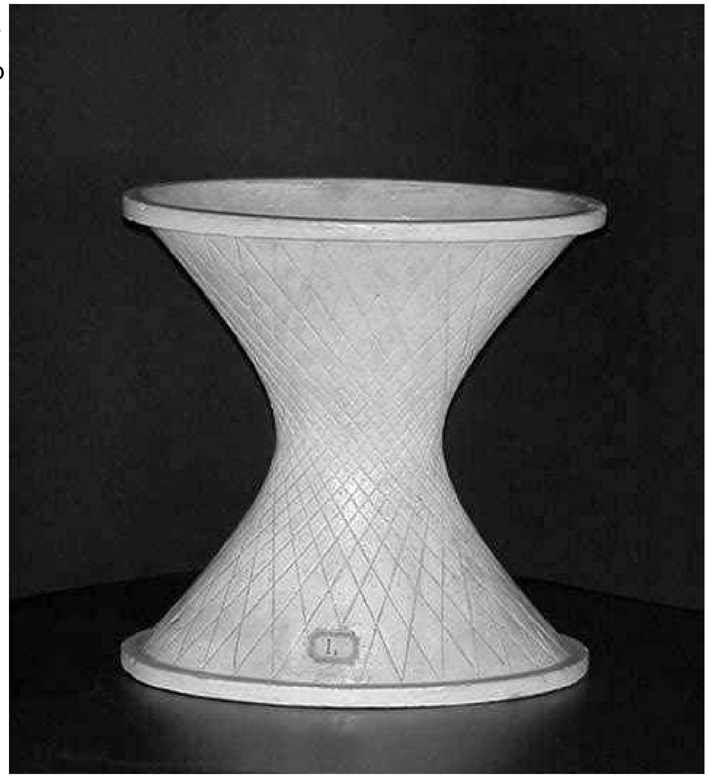
Dada la naturaleza del estudio, y en función de los datos que se requieren tanto del momento teórico como del momento metodológico de la investigación, así como la presentación del trabajo escrito, se sitúan las denominadas técnicas y protocolos instrumentales de la investigación documental. Para ello se emplea el análisis de las fuentes consultadas, que nos permitirán abordar y desarrollar los requisitos del momento teórico de la investigación, la observación documental y la presentación resumida. "Dentro de este ámbito, también se usará una serie de técnicas operacionales para manejar las fuentes fundamentales desde una dimensión estrictamente técnica y común a todas las ciencias, a saber: de subrayado de texto, construcción y presentación de índices, presentación de cuadros y gráficos, presentación del trabajo escrito, etc."(Balestrini, 1998, 135). Finalmente, se empleará la técnica del cuestionario, con el propósito de entrevistar a los alumnos, los cuales constituyen la muestra intencional.

3.7.-Descripción de los instrumentos y técnicas de recolección de datos

Para esta investigación se empleó una diversidad de técnicas e instrumentos de recolección de la información, que contienen principios sistemáticos y normas de carácter práctico e indispensables para ser aplicados a los materiales bibliográficos que se consultaron a través de todo el proceso de investigación, así como en la organización del trabajo escrito que se produjo al final del mismo.

Para un mejor análisis de las fuentes documentales, se utilizaron las técnicas de: presentación documental y presentación resumida. A partir del análisis de contenido, se analizaron las fuentes documentales y se inició la interpretación de los hechos que eran de interés para esta investigación. Esta lectura inicial fue seguida de otras, más detenidas y rigurosas de los textos, a fin de captar sus planteamientos esenciales y aspectos lógicos de sus contenidos, con el propósito de extraer los datos útiles para el estudio que se realizó en la aplicación de la técnica de la presentación resumida de un texto, permitiendo constatar de manera fiel y en síntesis, acerca de las ideas básicas que contenían las obras consultadas. Es importante destacar, que la técnica de análisis de contenido asume un importante papel en la construcción de los contenidos teóricos de la investigación, así como en lo relativo a los resultados de otras investigaciones que se han realizado en relación con el tema y los antecedentes del mismo. Algunas de las técnicas operacionales para el manejo de las fuentes documentales que se emplearon, a fin de introducir los procedimientos y protocolos instrumentales de la investigación documental en el manejo de datos ubicados en ésta, son: de subrayado, fichaje, bibliográficas, de citas y notas de referencias bibliográficas, presentación de cuadros, gráficos, presentación del trabajo escrito, etc. "El cuestionario es un sistema de preguntas que tiene por finalidad obtener datos para una investigación" (Pardinas, 1978, 95). El cuestionario facilita traducir los objetivos y las variables de la investigación a través de una serie de preguntas previamente preparadas de forma cuidadosa y relacionadas con el problema estudiado el cual es hacer una revisión crítica de la forma de enseñar la Matemática hasta el noveno grado de la Educación Básica y proponer una metodología para enseñar dicha asignatura, distinta a la acostumbrada, introduciendo el método de proyectos, a través del cual se forme en la alumna y en el alumno un pensamiento matemático que le ayude a entender, interpretar y desenvolverse en su entorno y en la vida. Este importante instrumento de recolección de información se aplicó con el propósito de permitirle a las alumnas entrevistadas y a los alumnos entrevistados expresar sus conocimientos matemáticos y demostrar su capacidad de aplicación en problemas cotidianos que se le presenten. En tal sentido a este nivel del proceso de recolección de los datos, y definido el objetivo del cuestionario, delimitadas las variables en estudio, la problemática general y específica que debió contener y la naturaleza de los datos que se deseaban recoger en función con los propósitos de la investigación, se procedió a diseñar este instrumento. En cuanto a la organización del cuestionario, se tuvo especial cuidado con el contenido de los aspectos indagados en el mismo, así como la naturaleza de las preguntas que se formularon para asegurar que estuviesen al nivel de las alumnas encuestadas y de los alumnos encuestados. Como estrategia de diseño de este instrumento se mantuvo en el anonimato los datos de identificación de las encuestadas y de los encuestados. De igual manera, las preguntas relativas a cada uno de los aspectos de la situación analizada del cuestionario, se agruparon para su presentación, atendiendo a su contenido y poder mantener la secuencia de los temas indagados.

Colección del Departamento de Matemática “Felice Casorati” de Pavia, Italia Fuente: www1.crui.it/musei/MenuMusei.asp?IDM=155



"En realidad, si se quiere que el desarrollo curricular tenga éxito, se debe partir de un punto de vista más amplio, que tenga en cuenta muchos otros factores. El currículo no debe ser solamente un índice de contenidos sino que debe contener propósitos, contenidos, métodos y procedimientos de evaluación"

Howson, (1979, 151)

Capítulo 4: Análisis e interpretación de los resultados

4.1.- Análisis de los contenidos del programa de estudio vigente

La revisión e interpretación del Programa de Estudio y Manual del Docente de la tercera etapa de Educación Básica de la asignatura de Matemática vigente desde el año 1987, específicamente los programas de estudio de cuarto a octavo grado de la asignatura Matemática, se hizo relacionando los contenidos programáticos del mismo con los problemas de la prueba. La aritmética es el corazón del currículo de matemática en los programas de cuarto a sexto grado, y su meta principal es enseñar destrezas en el cálculo. El programa de cuarto grado trata casi exclusivamente sobre la numeración, los números, el valor que éstos reciben según la posición que ocupan, la suma, la resta y la multiplicación de números racionales positivos (en forma de decimales). Los de quinto y sexto grado, se ocupan de la multiplicación, la división, los números fraccionarios, proporcionalidad, unidades de medida y geometría. Los de séptimo y octavo ya se adentran en los enteros, aparecen las X, Y y Z, primero como incógnitas de ecuaciones y luego como variables.

En la tabla 4 se muestran los objetivos específicos que los alumnos debieron haber logrado de los contenidos programáticos según los Programas de Estudio de 4to a 8vo grado y su vinculación a los problemas de la prueba.

Tabla 4

Nº	Grado	Objetivos Específicos	Contenidos Programáticos
1	6to	11.-Aplicar el concepto de proporcionalidad directa en la resolución de problemas	Proporcionalidad
	7mo	23.-Resolver problemas en los cuales se utilicen relaciones entre cuadriláteros y sus elementos	Cálculo de áreas
		25.-Resolver problemas en los cuales se utilicen las fórmulas para el cálculo de áreas	
	8vo	3.- Resolver problemas en los cuales se utilicen las operaciones definidas en Q	Conjunto de los racionales Q
2	6to	12.-Utilizar el % y la regla de interés como una aplicación del concepto de proporcionalidad directa	Proporcionalidad
	7mo	11.- Identificar elementos del conjunto de los números racionales Q	Conjunto de los racionales
	8vo	3.- Resolver problemas en los cuales se utilicen las operaciones definidas en Q	
3	7mo	1.1.- Expresar en forma de ecuaciones, situaciones referidas a relaciones entre números naturales N	Números naturales N
		1.2.-.Resolver ecuaciones en el conjunto de los números naturales N	
	8vo	2.- Resolver problemas en los que se utilicen las operaciones definidas en Z	Operaciones y propiedades en Z
		3.-Resolver problemas en los que se utilicen las operaciones definidas en Q	Operaciones en Q
4	6to	11.-Aplicar el concepto de proporcionalidad directa en la resolución de problemas	Proporcionalidad
	7mo	26.1.- Aplicar diferentes medidas de volumen del Sistema Internacional (S.I) en cálculos aproximados.	Volumen
		26.2.- Usar las relaciones entre m^3, el dm^3 y el cm^3.	
		27.1.- Resolver problemas en los cuales se utilicen las fórmulas para el cálculo de volúmenes.	
		27.2.- Usar las relaciones entre medidas de capacidad y las de volumen.	
5	7mo	28.- Resolver problemas donde se apliquen las nociones elementales de probabilidad.	Probabilidad
6	4to	24.-Resolver problemas de cálculo del perímetro de triángulos y de cuadriláteros	Perímetro
	6to	11.-Aplicar el concepto de proporcionalidad directa en la resolución de problemas 13.1.- Establecer las relaciones "ser divisor de" y "ser múltiplo de"	Criterios de divisibilidad
		13.2.- Aplicar los criterios de divisibilidad por 2,3 y 5, en Z	
	8vo	2.- Resolver problemas en los que se utilicen las operaciones definidas en Z	Operaciones en Z
7	6to	12.- Utilizar el % y la regla de interés como una aplicación del concepto de proporcionalidad directa	Proporcionalidad
	8vo	3.- Resolver problemas en los que se utilicen las operaciones definidas en Q	Operaciones en Q
8	7mo	30.1.- Agrupar datos estadísticos en intervalos de clase	Estadística Descriptiva
		30.2.- Determinar la frecuencia absoluta y la frecuencia absoluta acumulada en una colección de datos agrupados.	
		31.- Elaborar histogramas de frecuencia absoluta	

En la tabla 5 se muestra la relación entre los contenidos programáticos involucrados en los problemas de la prueba así como una crítica general y sugerencias al programa de estudio.

Tabla 5

<table>
<tr><th>Grado</th><th>Contenido Programático</th><th>Problema De la prueba</th><th>Crítica</th><th>Sugerencia</th></tr>
<tr><td>4</td><td>Perímetro</td><td>6</td><td rowspan="10">Ante la revisión del Programa de Estudio, valdría la pregunta ¿Existe una biyección entre los contenidos programáticos y los problemas reales?. Cuando el estudiante aborda un problema de la vida real cualquiera (como los de la prueba) se produce en él una ruptura de su equilibrio cognitivo, razón por la cual no puede transferir lo aprendido a la resolución de problemas cotidianos.</td><td rowspan="10">La enseñanza de la matemática invita a crear una propuesta conceptual, que lleve a una nueva visión de la matemática, a la altura de las necesidades del siglo XXI, por lo tanto sería necesario:
• Replantear la secuenciación de los contenidos matemáticos en función de la realidad y características contextuales, evitando la parcelación en cuanto a su tratamiento y apostando por su encadenamiento significativo.
• Enseñar a través de la resolución de problemas cotidianos, para ello es fundamental estimular la participación del estudiante en experiencias donde interactúe socialmente.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Proporcionalidad</td><td>1, 2, 3, 6 y 7</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Conjunto □ Q</td><td>3, 6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">7 y 8</td><td>Conjunto Z</td><td>3, 6</td></tr>
<tr><td>Conjunto □ Q</td><td>1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7</td></tr>
<tr><td rowspan="4">7</td><td>Cálculo de áreas</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Volumen</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Probabilidad</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Estadística</td><td>8</td></tr>
</table>

4.2.- Análisis de los contenidos de los textos de educación básica

El papel que juegan los libros de texto en Matemática es determinante en las prácticas educativas. Sorprende constatar que, aunque los libros de texto están presentes en los grados de primaria y secundaria, sólo unos cuántos estudios se han ocupado de la forma en que son utilizados. Clark y Yinger (1979) encontraron que las maestras y los maestros usaban los materiales disponibles, como libros de texto y guías para la enseñanza, para elegir los temas que impartían y programar la secuencia de los contenidos. Schwille et al. (1983) llevaron a cabo estudios sobre el uso de libros de texto en el cuarto grado de Matemática y encontraron que, aunque las maestras y los maestros emplearan el mismo libro de texto, no enseñaban el mismo contenido. Algunos de ellos seguían el libro de texto escrupulosamente, mientras que otros se mostraban muy selectivos.

En la revisión y presentación de los contenidos programáticos abordados en los ocho textos de matemática (ver tabla 6), no se ha hecho un análisis riguroso tal como lo plantea el profesor Mora (2001), sino tomando en cuenta el aspecto temático contenido en los mismos. En dicho análisis se utiliza la frase *problemas pseudo-cotidianos* los cuales se definen como aquellos problemas donde los planteamientos parecieran vinculados con la realidad pero su lenguaje dista considerablemente de la misma.
Los textos revisados son los siguientes:

Tabla 6: Textos analizados

<table>
<tr><th>Nº</th><th>TÍTULO</th><th>AUTORES</th><th>EDITORIAL</th><th>CIUDAD</th><th>AÑO</th></tr>
<tr><td>A</td><td>Matemática Constructiva 7mo Grado</td><td>Uribe Julio y Berrío Israel</td><td>Edinova</td><td rowspan="8">Caracas</td><td>1999</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Matemática 7mo Grado</td><td>Santillana</td><td>Santillana</td><td>1997</td></tr>
<tr><td>C</td><td>Matemática 7mo Grado</td><td>Breijo Benigno y Domínguez Pablo</td><td>Triángulo</td><td>1998</td></tr>
<tr><td>D</td><td>Matemática. 7mo Grado</td><td>Maradey Diógenes</td><td>Distribuidora Escolar</td><td>1999</td></tr>
<tr><td>E</td><td>Matemática. Educación Básica. 7mo Grado</td><td>Salazar Jorge y Rojas Julián</td><td>Romor</td><td>1991</td></tr>
<tr><td>F</td><td>Matemática 2000 8vo Grado</td><td>Montezuma Aida, Rada Saulo, Rodríguez Jesús y Fontcuberta María</td><td>Mc Graw-Hill</td><td>1995</td></tr>
<tr><td>G</td><td>Matemática 8vo Grado</td><td>Breijo Benigno y Domínguez Pablo</td><td>Triángulo</td><td>1998</td></tr>
<tr><td>H</td><td>Matemática 8vo Grado de Educación Básica</td><td>Mendiola Esteban</td><td>Biosfera</td><td>1988</td></tr>
</table>

En la tabla 7 se presentan los objetivos específicos de 7mo grado que los alumnos de la muestra debieron haber logrado para el desarrollo exitoso de la prueba.

Tabla 7: Objetivos específicos de 7mo Grado

Nº	Objetivo específico
1.1	**Expresar** en forma de ecuaciones, situaciones referidas a relaciones entre números naturales
1.2	**Resolver** ecuaciones en el conjunto de los números naturales
2	**Identificar** elementos del conjunto de los números enteros(Z)
4	**Calcular** la suma de dos números enteros
6	**Calcular** la diferencia de dos números enteros
11	**Identificar** elementos del conjunto de los números racionales(Q)
12.1	**Calcular** la suma de dos números racionales
12.2	**Resolver** problemas en los cuales se utilice la adición de números racionales
14.1	**Calcular** la diferencia de dos números racionales
14.2	**Resolver** problemas en los cuales se utilicen la adición y sustracción de números racionales
15.1	**Calcular** el producto de dos números racionales
15.2	**Aplicar** las propiedades de la multiplicación
15.3	**Resolver** problemas en los cuales se utilice la multiplicación de números racionales
23	**Resolver** problemas en los cuales se utilicen relaciones entre cuadriláteros y sus elementos
25	**Resolver** problemas en los cuales se utilicen las fórmulas para el cálculo de áreas
26.1	**Aplicar** diferentes medidas del volumen del Sistema Internacional (S.I.) en cálculos aproximados
26.2	**Usar** las relaciones entre el metro cúbico, el decímetro cúbico y el centímetro cúbico
27.1	**Resolver** problemas en los cuales se utilicen las fórmulas para el cálculo de volúmenes
27.2	**Usar** las relaciones entre las medidas de capacidad y las de volumen
28	**Resolver** problemas donde se apliquen las nociones elementales de probabilidad
30.1	**Agrupar** datos estadísticos en intervalos de clase
30.2	**Determinar** la frecuencia absoluta y la frecuencia absoluta acumulada en una colección de datos agrupados
31	**Elaborar** histogramas de frecuencia absoluta

En la revisión y presentación de los contenidos programáticos abordados en los textos de Matemática A, B, C y D de 7mo Grado (Tabla 8) y E, F, G y H de 8vo Grado (Tabla 10) no se ha hecho un análisis riguroso tal como lo plantea el profesor Mora (2001), sino tomando en cuenta el aspecto temático contenido en los mismos. En dicha revisión se utiliza la frase *problemas pseudo-cotidianos* los cuales se definen como aquellos problemas en los cuales los planteamientos parecieran vinculados con la realidad pero su lenguaje dista considerablemente de la misma.

Tabla 8: Revisión de los textos A, B, C y D

Contenido	A	B	C	D
□	No plantean ecuaciones expresables por medio de algoritmos Las ecuaciones son desarrolladas algorítmicamente (sin ningún tipo de razonamiento lógico)	Comienza con un breve repaso del conjunto □ Plantea problemas pseudo- cotidianos (edades, precios, etc.) realizables por medio de ecuaciones	Definen, de entrada, ecuación en □ y sus elementos, sin algún tipo de preámbulo pedagógico. Las ecuaciones son desarrolladas algorítmicamente. (sin ningún tipo de razonamiento lógico)	Hace un preámbulo sobre ecuaciones vistas en grados anteriores, y luego define ecuación. Sin embargo las resuelve transponiendo términos (Algorítmicamente). Plantea problemas pseudo-cotidianos.
Z	Inicia el tema con situaciones cotidianas con problemas de temperaturas, deudas y de altitud. No resuelve ecuaciones del tipo $a + x = b,\ con\ a, b \in N$ No representan números enteros en la recta. No definen valor absoluto No resuelve ecuaciones del tipo $a + x = b,\ con\ a, b \in$ Z	Inicia el tema con situaciones cotidianas con problemas de temperaturas, ganancias y pérdidas y desplazamientos en dos sentidos. Representan números enteros en la recta. Definen valor absoluto Utiliza el método del salto de la rana para la suma en Z	Plantean pocas ecuaciones de la forma $a + x = b,\ con\ a, b \in N$ y las que plantean las resuelven mecánicamente. No representan números enteros en la recta. No definen valor absoluto	Resuelven las ecuaciones con un razonamiento lógico. Resuelven problemas de la vida cotidiana, con monedas y vouchers. Representan números enteros en la recta. Definen valor absoluto.
□	No plantea la insuficiencia de Z para resolver situaciones de mediciones o reparticiones, ni aplica las operaciones en □ para ejemplos de la vida real.	Plantea la insuficiencia de Z Expone situaciones cotidianas, utilizando las fracciones $\frac{a}{b}$ y números mixtos $m\, {}^{p}\!/_{q}$ si $a > b$ para la suma, resta, multiplicación y división.	Plantea la insuficiencia de Z Expone situaciones cotidianas, utilizando las fracciones $\frac{a}{b}$ y números mixtos $m\, {}^{p}\!/_{q}$ si $a > b$ sólo para la suma y la resta.	Plantea la insuficiencia de Z Expone situaciones pseudo-cotidianas
Área	Hay muy pocos problemas vinculados con la cotidianidad. Comienzan con un recetario de fórmulas para calcular áreas. Las medidas de los elementos de las figuras geométricas son dadas en unidades diversas, causando confusión y desinterés en los alumnos Desconocimiento del tangram chino, como juego idóneo para trabajar áreas.			
Volumen	Orientan a los alumnos a la construcción de un prisma y una pirámide en cartulina de igual		Hay muy pocos problemas vinculados con la cotidianidad Comienzan con un recetario de fórmulas para calcular volúmenes.	

Tabla 8: (continuación)

Probabilidad	Tiene deficiencias teóricas y prácticas. Ausencia de experimentos. Omisión de la palabra azar.	Inicia con una noción de probabilidad. Define experimentos determinísticos y aleatorios, espacio muestral y evento. Hay un número significativo de problemas cotidianos.	Abundan los ejemplos clásicos de lanzar una moneda, un dado y extraer bolas o fichas de colores.. Define probabilidad de que ocurra un suceso.	Abundan problemas de la vida cotidiana. Propone la resolución de problemas utilizando diagramas de árbol
Estadística	Se agrupan datos estadísticos en intervalos de clase tabulándolos junto a la frecuencia absoluta y acumulada. Elaboran histogramas de frecuencia ajenos a la realidad.			

En la tabla 9 se presentan los objetivos específicos de 8vo grado que los alumnos de la muestra debieron haber logrado para transferir los conocimientos adquiridos en el desarrollo de la prueba.

Tabla 9: Objetivos específicos de 8vo Grado

N°	Objetivo Específico
2	Resolver problemas en los cuales se utilicen las operaciones definidas en $\mathbb{Z}$
3	Resolver problemas en los cuales se utilicen las operaciones definidas en □
4	Hallar proyecciones ortogonales de puntos y segmentos sobre una recta

Tabla 10: Revisión de los textos E, F, G y H

<table>
<tr><th>Contenido</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>H</th></tr>
<tr><td>$\mathbb{Z}$</td><td rowspan="2">Las propiedades de $\mathbb{Z}$ y □ las muestran tabuladas.
Carece de ejemplos
Proponen ejercicios vinculados con la realidad.</td><td rowspan="2">Presentan un resumen de conceptos básicos.
Plantean ejercicios con el propósito de reforzar los conocimientos adquiridos.
Hay sólo cuatro problemas relacionados con la vida real.
Hay pocas situaciones expresables con ecuaciones.</td><td>Carece de situaciones expresables con ecuaciones.</td><td rowspan="2">Presentan un resumen de conceptos básicos.
Contiene una lista de problemas pseudo-cotidianos relacionados con: capital, edad y geometría.</td></tr>
<tr><td>□</td><td>Presentan un resumen de conceptos básicos.
Tiene una lista de problemas interesantes, algunos vinculados a la realidad.</td></tr>
<tr><td>Proyección Ortogonal</td><td colspan="4">Informan a los alumnos que al trazar una perpendicular desde un punto P a una recta R, el punto P' que intercepta la perpendicular con la recta R es la proyección ortogonal del punto P sobre la recta R.
Proponen la proyección ortogonal de segmentos.</td></tr>
</table>

4.3.- Análisis e Interpretación de los Resultados de la Prueba

4.3.1.- Resolución de un problema de la prueba[1]

(4) Situación real

Es el punto de partida o planteamiento del problema, por ejemplo el problema Nº 6 de la prueba de desarrollo:

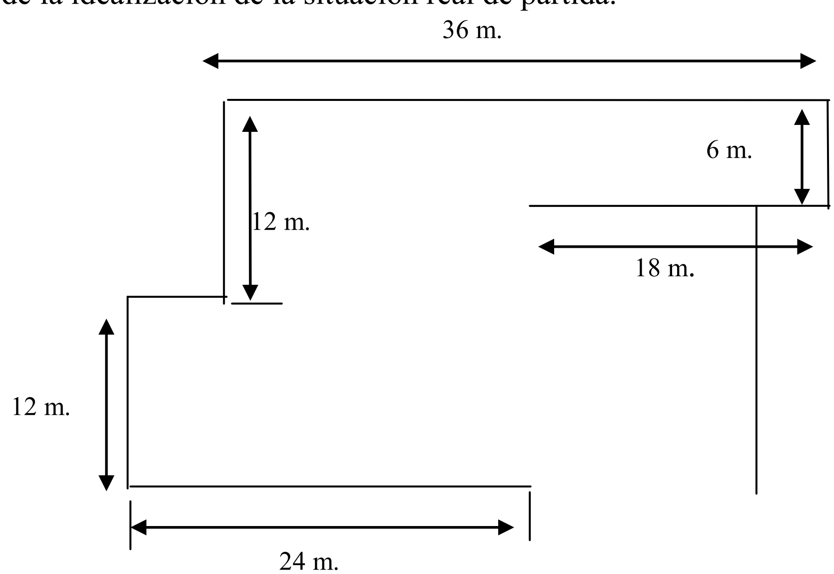
El gobierno decide ayudar a las familias sin vivienda con la compra de una parcela en el interior del país. Las dimensiones de algunas parcelas son similares a las de **figura 5**. Una de las personas que recibió su parcela decide cercarla para lo cual desea colocar en cada esquina una columna (horcón) de madera. Además, la persona quiere que todas las columnas tengan la misma separación y que esta última sea lo más grande posible.

α) ¿Cuántas columnas necesita el nuevo dueño de la parcela?

β) ¿Cuánto dinero gasta en total sabiendo que cada m^2 de cerca metálica cuesta Bs. 45.000 y cada columna Bs. 27.000?

(B) Modelo real

Es el resultado de la idealización de la situación real de partida.



[1] Este apartado está tomado en forma parcial del artículo “Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática Enfocada en las Aplicaciones” del Profesor David Mora y de la página web <www.escolar.com/matem/16regladetres.htm>

(C) Modelo matemático

Es el resultado de la matematización del problema original. El modelo matemático desprendido en muchos casos del problema concreto contiene objetos matemáticos tales como criterios de divisibilidad, perímetro y proporcionalidad.

Proceso de matematización

Objetos matemáticos

Criterios de divisibilidad

Perímetro

Proporcionalidad

Estación 1 (Criterios de divisibilidad)

Los criterios de divisibilidad son reglas que sirven para saber si un número es divisible por otro sin necesidad de realizar la división. Aunque pueden buscarse criterios para todos los números, sólo expondremos los más comunes:

Criterio de divisibilidad por 2

Un número es divisible por 2 si termina en 0 o cifra par. (Es recomendable el juego de pares o nones)

Ejemplos:

Números divisibles por 2: 36, 94, 521342, 40,…

Criterio de divisibilidad por 3

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Ejemplos:

Números divisibles por 3: 36, 2142, 42,…

Criterio de divisibilidad por 5

Un número es divisible por 5 si la última de sus cifras es 5 o es 0.

Ejemplos:

Números divisibles por 5: 35, 2145, 40,…

Criterio de divisibilidad por 9

Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Ejemplos:

Números divisibles por 9: 495, 945, 53640,…

Criterio de divisibilidad por 11

Se debe hacer lo siguiente: sumar las cifras que ocupan lugares pares, sumar las cifras que ocupan lugares impares. A la suma mayor le restamos la suma menor, si la diferencia es 0 ó múltiplo de 11, entonces el número es múltiplo de 11.

Ejemplos:

Múltiplos de 11: 2343649, 9889, 18161902,...

<u>Estación 2</u>

1) Sugiérales que construyan el metro en papel, cartulina u otro material apropiado, a partir de un modelo propuesto por la o el docente, inicie la actividad planteando alguna situación donde los alumnos retomen los conocimientos y experiencias que traen del grado anterior, en relación con el metro como unidad o patrón de medida.
2) Propóngales efectuar nuevas mediciones. Por ejemplo: el alto de la puerta del aula, el ancho de una ventana, el alto de su propio cuerpo, el largo de uno de los baños, el contorno de uno de sus dedos, el largo de una de sus uñas, la punta de su lápiz.
3) Formule preguntas en relación a las mediciones que han realizado y oriéntelas y oriéntelos para que comprueben que al medir compararon: el largo, ancho y/o altura de cuerpo u objeto que midieron con unidades de medida, que fueron el metro, el decímetro, el centímetro y /o el milímetro.
4) Promueva la discusión de los resultados, anote algunos en el pizarrón, haga que los comparen, llévelos a darse cuenta que para medir las diferentes longitudes usaron unidades de medida diferentes:
    - El metro
    - El centímetro
    - El decímetro
    - El milímetro
5) ¿Y para medir el contorno de un dedo, por ejemplo, o de la “muñeca” ¿qué usaron? ¿quién lo midió? ¿cómo?
6) Pídales que lo expliquen a sus compañeras y compañeros. Si ninguna alumna o ningún alumno intentó hacerlo, trate de que descubran el procedimiento. ¿Cómo? Por ejemplo:
7) Largo del contorno del dedo pulgar derecho: cinco centímetros y nueve milímetros = 5,9 cm.
8) Invítelas e invítelos ahora a medir el contorno de la muñeca con una cabuya y que trasladen la longitud de la misma a una regla graduada en centímetros y milímetros, tal como lo hicieron con el contorno del dedo
9) Haga que las alumnas y los alumnos presten atención al hecho de que para medir se necesita siempre un patrón o unidad de media, pero que el procedi-

miento para medir puede cambiar, como sucedió en el caso de medir el contorno del dedo y de la muñeca, por ejemplo, o cuando usan un compás para ayudarse en la medición de alguna longitud.

10) Llévelas y llévelos a concluir, que una magnitud puede medirse con distintos patrones o unidades de medida y que cuando de miden magnitudes diferentes se usan patrones o unidades de medida diferentes.
11) Pídales que representen cada una de las unidades de medida que utilizaron, con su símbolo:

Metro = m

Centímetro = cm

Decímetro = dm

Milímetro = mm

12) Invítelas e invítelos a recordar qué parte del metro son el decímetro, el centímetro y el milímetro. Pídales que lo comprueben en su metro de papel u otro y que intenten expresarlo, en cada caso, como una fracción de metro y como una expresión decimal.
13) Ayúdelos con algunas preguntas:

- ¿Qué parte del metro es el centímetro? ¿Qué fracción representa? ¿Cuál es su símbolo?
- ¿Qué parte es el centímetro? ¿Qué fracción representa? ¿Cuál es su símbolo?
- ¿Qué parte es el milímetro? ¿Qué fracción representa? ¿Cuál es su símbolo?

<u>Estación 3 (Proporcionalidad)</u>

Se llama razón al cociente entre dos números y se llama proporción a la igualdad de dos razones.

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a y **b** se llaman extremos
b y **c** se llaman medios

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES

En una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$a \times d = b \times c$$

Los problemas en los que los elementos mantienen una relación proporcional directa o inversa se resuelven mediante la regla de tres simple.

(D) Resultado matemático

De esta manera se obtienen resultados matemáticos definitivos. Normalmente en problemas que atañen al ambiente se obtienen resultados numéricos; sin embargo se podría llegar en otros casos, lo cual es común en los problemas de la Matemática, resultados expresados en otras fórmulas o expresiones no numéricas. En el Apéndice Documental 3 están los resultados del problema.

4.3.2.- Análisis de la aplicación de la prueba

Para el análisis de la aplicación de la prueba se siguió el siguiente esquema:

Tabla 11: Esquema de la revisión de la prueba

RAZONAMIENTO	CÁLCULO	RESULTADO

$$
lógico \begin{cases} correcto & \begin{cases} bueno \\ malo \end{cases} \\ incorrecto & \begin{cases} bueno \\ malo \end{cases} \end{cases}
$$

$$
ilógico \begin{cases} correcto & \begin{cases} bueno \\ malo \end{cases} \\ incorrecto & \begin{cases} bueno \\ malo \end{cases} \end{cases}
$$

En el siguiente cuadro se dan algunos ejemplos de problemas resueltos por los/as alumnos/as en los cuales el razonamiento, el cálculo y el resultado son respectivamente:

- ✓ Lógico, correcto y bueno (LCB)
- ✓ Lógico, correcto y malo (LCM)
- ✓ Lógico, incorrecto y bueno (LIB)
- ✓ Lógico, incorrecto y malo (LIM)
- ✓ Ilógico, correcto y bueno (ICB)
- ✓ Ilógico, correcto y malo (ICM)
- ✓ Ilógico, incorrecto y bueno (IIB)
- ✓ Ilógico, incorrecto y malo (IIM)

Ejemplos de las distintas categorías:

LCB (Lógico, correcto, bueno)

El problema N° 5 la alumna Y.O. responde con un esquema en el cual compara ambas probabilidades, ella hace un razonamiento lógico (utiliza la definición primaria de probabilidad) con los cálculos correctos ($\frac{9}{36}$ y $\frac{8}{36}$) y responde correctamente "mayor oportunidad en el tablero 1".

LCM (Lógico, correcto, malo)

En el problema N° 1 el alumno J.P. hace uso de un razonamiento lógico, un cálculo correcto pero lamentablemente el resultado lo expresa como A = 2.337.500 en vez de Bs. 2.337.500

LIB (Lógico, incorrecto, bueno)

Se tiene una caja con 46 bolas negras, 30 rojas y 10 blancas. ¿Cuántas bolas blancas deberían agregarse a la caja para que la probabilidad de sacar al azar una bola blanca sea del 20%?

La probabilidad de sacar al azar una bola blanca es de $\frac{10}{86}$ ya que 10 son las bolas blancas y 86 son las bolas en total. Debo agregar b bolas blancas de manera tal que $\frac{10+b}{86+b}=\frac{1}{5}$. Multiplicando ambos lados de la igualdad por 5(86 + *b*) se obtiene $5\cdot(10+b)=86+b$ y esto es $50+5b=86+b \Leftrightarrow 4b=86-50 \Leftrightarrow b=9$. Comprobando se tiene que $\frac{10+9}{86+9}=\frac{19}{95}=\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1}{5}$

LIM (Lógico, incorrecto, malo)

En el primer problema de la prueba realizada por el alumno V. R. hay un caso de razonamiento lógico: el alumno coloca la fórmula del área de un rectángulo expresándolo como $B\cdot h$ (base por altura) con las unidades en m^2 y luego el resultado lo multiplica por la cantidad en decimales. Sin embargo, el cálculo es incorrecto por errores cometidos al multiplicar un entero por un decimal, en primer lugar: ($8,5\cdot 11m^2=9,35m^2$) y en segundo lugar: ($25,000\cdot 9,35=233.750.000$) confunde 25,000 por 25.000 sin embargo en la respuesta coloca 233.750.000 en vez de 233,750,000 y el resultado lo expresa como A de área. La respuesta es considerada mala ya que difiere de la verdadera Bs. 2.337.500.

ICB (Ilógico, correcto, bueno)

En el ejercicio calcule el área de un cuadrado cuya diagonal mide $4\sqrt{2}$ cms un alumno procede de la siguiente forma: "Calculo la longitud de cada lado utilizando el teorema de Pitágoras y luego lo multiplico por 4 ya que es un cuadrado" (razonamiento ilógico). "$l^2+l^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2=16\cdot 2=32$ luego $2l^2=32\Rightarrow l^2=16\Rightarrow l=4$ es decir cada lado mide 4 cms" (cálculo correcto). Por lo tanto, concluye el alumno, "el área del cuadrado es $4+4+4+4=16\ cms^2$ (respuesta mala)

ICM (Ilógico, correcto, malo)

En el problema N° 3 de la prueba hay un caso, el de la alumna G.V. de un razonamiento ilógico: la alumna explica "Se divide 950 entre dos y a una de las mitades se le resta 28 y se le suma a la otra mitad" luego hace los cálculos correctamente 950 entre 2 = 475 y las respectivas restas y concluye con su respuesta, mala por demás, de "Van 447 varones y 503 hembras". Resultado que contradice el hecho de que la diferencia entre ambos sexos es de 28 y no de 56 como ella argumenta.

IIB (Ilógico, incorrecto, bueno)

En el libro Errar es un placer, Mancera (1998, 20) sorprende al lector con el siguiente ejercicio:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \dfrac{x-2}{y-1} = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{x-1}{y-2} = 1 \end{cases}$

"Si trabajamos con la primera ecuación tenemos:

$$\frac{x-2}{y-1} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{x}{y} - \frac{2}{1} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{1} + \frac{3}{5}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2+3}{1+5}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{6}$$

$$x = 5 \quad \text{y} \quad y = 6$$

El lector puede comprobar que la solución es la correcta"

Este es un ejemplo de un razonamiento ilógico, ya que el alumno trabaja sólo con la primera ecuación, ignorando la segunda. El cálculo es incorrecto debido a que rompe con las reglas de las operaciones con fracciones. Es importante resaltar que el error en el segundo paso se debe a una doble acepción de la definición $\frac{\alpha}{\beta}$: esa “rayita” que se puede colocar tanto horizontal como diagonalmente hace las veces de fracción ($\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$) pero también funciona como una razón ($\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$) tal como lo ejemplifica Mancera (1998, 8) “consideremos que un jugador de béisbol en un encuentro, de cinco oportunidades al bate pega hit en tres ocasiones y en un segundo partido, de siete oportunidades al bate batea hit en cinco oportunidades. De este modo de 12 oportunidades al bate ligó 8 hits. En símbolos se puede escribir $\frac{3}{5}+\frac{5}{7}=\frac{3+5}{5+7}=\frac{8}{12}$. Si hacemos la suma de razones como se hacen las de las fracciones, encontraremos un resultado totalmente incoherente con la situación aludida: $\frac{3}{5}+\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 7+5\cdot 5}{5\cdot 7}=\frac{21+25}{35}=\frac{46}{35}$ (de 35 turnos al bate ligó 46 hits)”

IIM (Ilógico, incorrecto, malo)

En el problema N° 5 la alumna K.M. responde “En el segundo tablero porque las casillas oscuras están más dispersas que en el primero”. El razonamiento es ilógico debido al desconocimiento de nociones básicas de probabilidad, por ende el cálculo es incorrecto y la respuesta mala.

Tabla 12: Corrección de la prueba aplicada a los alumnos de 8vo Grado

Categoría Problema		EN BLANCO	RAZONAMIENTO							
			LÓGICO				ILÓGICO			
			CÁLCULO							
			CORRECTO		INCORRECTO		CORRECTO		INCORRECTO	
			RESULTADO							
			BUENO	MALO	BUENO	MALO	BUENO	MALO	BUE-NO	MALO
1		16	6	10	0	0	14	43	0	81
2	a	75	9	10	0	0	33	2	0	41
	b	96	13	0	0	0	19	4	0	38
	c	116	6	0	0	0	5	0	2	41
3		39	10	0	0	0	7	42	0	72
4	a	103	0	0	0	0	7	26	0	34
	b.1	156	0	0	0	0	0	0	0	14
	b.2	156	0	0	0	0	0	0	0	14
	c	154	0	0	0	0	0	0	0	16
5		18	51	0	0	0	0	6	0	95
6	a	91	0	0	0	0	0	0	0	79
	b	96	0	0	0	2	0	0	1	71
7	a	117	21	5	0	0	0	0	0	27
	b	164	2	0	0	0	0	0	0	4
8	a	62	29	0	0	0	0	0	0	79
	b	61	69	3	0	0	0	2	0	35
	c	75	27	0	0	0	6	17	0	45
	d	81	62	0	0	0	0	0	0	27
	e	90	57	0	0	0	0	0	0	23

Tabla 13: Corrección de la prueba aplicada a los alumnos de la ENAHP-IUT

Categoría		EN BLANCO	RAZONAMIENTO							
			LÓGICO				ILÓGICO			
			CÁLCULO							
			CORRECTO		INCORRECTO		CORRECTO		INCORRECTO	
			RESULTADO							
Problema			BUENO	MALO	BUENO	MALO	BUENO	MALO	BUENO	MALO
1		2	0	0	0	0	4	4	0	5
2	a	4	0	0	0	0	8	0	0	3
	b	4	0	0	0	0	7	0	0	4
	c	5	0	0	0	0	10	0	0	0
3		3	0	0	0	0	6	5	0	1
4	a	15	0	0	0	0	0	0	0	0
	b.1	15	0	0	0	0	0	0	0	0
	b.2	15	0	0	0	0	0	0	0	0
	c	15	0	0	0	0	0	0	0	0
5		4	5	0	0	0	0	1	0	5
6	a	8	0	0	0	0	0	0	0	7
	b	13	0	0	0	0	0	0	0	2
7	a	4	3	0	0	0	0	4	0	4
	b	10	3	0	0	0	0	0	0	2
8	a	5	9	0	0	0	0	0	0	1
	b	5	5	0	0	0	0	4	0	1
	c	5	0	0	0	0	4	4	0	2
	d	8	4	0	0	0	0	0	0	3
	e	5	10	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 14: Corrección de la prueba aplicada a ambas muestras

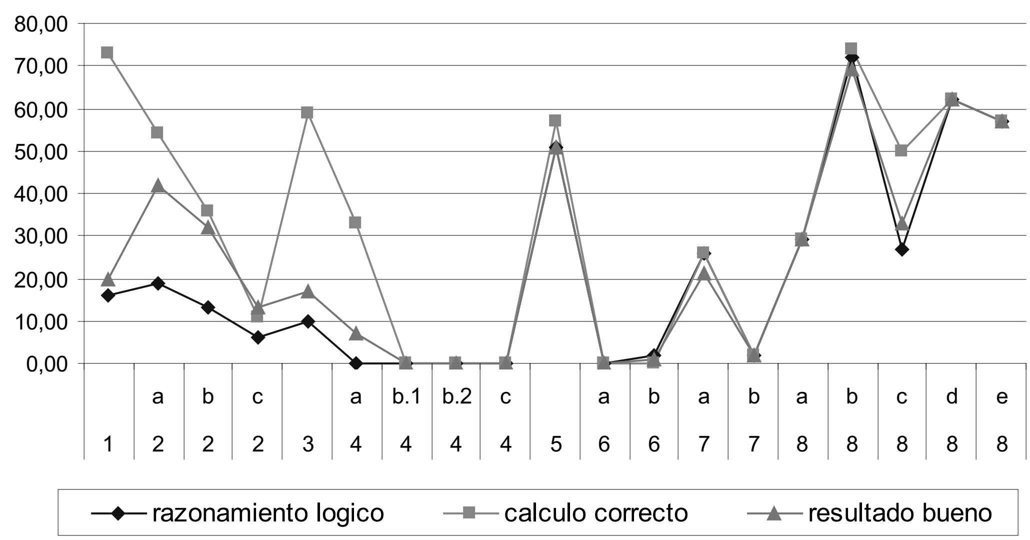
Categoría / Problema		EN BLANCO	RAZONAMIENTO							
			LÓGICO				ILÓGICO			
			CÁLCULO							
			CORRECTO		INCORRECTO		CORRECTO		INCORRECTO	
			RESULTADO							
			BUENO	MALO	BUENO	MALO	BUENO	MALO	BUENO	MALO
1		18	6	10	0	0	18	47	0	86
2	a	79	9	10	0	0	41	2	0	44
	b	100	13	0	0	0	26	4	0	42
	c	121	6	0	0	0	15	0	2	41
3		42	10	0	0	0	13	47	0	73
4	a	118	0	0	0	0	7	26	0	34
	b.1	171	0	0	0	0	0	0	0	14
	b.2	171	0	0	0	0	0	0	0	14
	c	169	0	0	0	0	0	0	0	16
5		22	56	0	0	0	0	7	0	100
6	a	99	0	0	0	0	0	0	0	86
	b	109	0	0	0	2	0	0	0	81
7	a	121	24	5	0	0	0	4	0	31
	b	174	5	0	0	0	0	0	0	6
8	a	69	38	0	0	0	0	0	0	78
	b	66	74	3	0	0	0	6	0	36
	c	79	27	0	0	0	10	21	0	47
	d	89	66	0	0	0	0	0	0	30
	e	95	67	0	0	0	0	0	0	23

4.3.2.1.-Gráficos estadísticos de los resultados

En el eje horizontal están los números de las preguntas de los problemas de la prueba de desarrollo mientras que en el eje vertical está el número de alumnos que intentó responderlas.

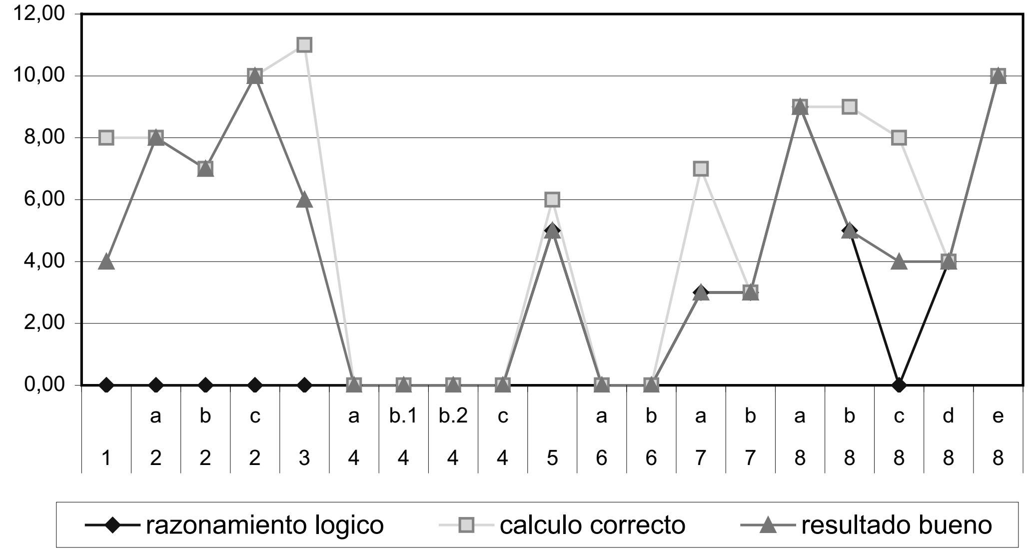
En el siguiente gráfico estadístico poligonal se observa como una muestra de 170 alumnos cursantes de octavo grado de la Escuela Básica hizo un total de 1464 respuestas distribuidas entre 19 preguntas. Sólo el 27% razonó lógicamente, el 46% realizó cálculos en forma correcta y un 31% logró dar con la respuesta definitiva.

Gráfico Escuela Básica



En el siguiente gráfico estadístico poligonal se observa como una muestra de 15 alumnos cursantes del semestre introductorio en la Licenciatura de Ciencias Fiscales de la Escuela Nacional de Administración y Hacienda Pública hizo un total de 140 respuestas distribuidas entre 19 preguntas. Sólo el 28% razonó lógicamente, el 71% realizó cálculos en forma correcta y un 56% logró dar con la respuesta definitiva.

Gráfico ENAHP



4.3.2.2.- Análisis de errores cometidos en la prueba[2]

- En el problema N° 1 de la prueba de desarrollo la alumna C.A. responde:

“$25.000Bs \cdot m^2$

$(11m)^2 + (8,5m)^2 =$

$121m^2 + 74,25m^2 = 195,25m^2$

El costo total = 4.081.250,0000 Bs.”

El error aquí según Movshovitz-Hadar, Inbar y Zavlavsky (1987) es del tipo IV ya que éste se produce por deformación de una fórmula. Ella aplicó el teorema de Pitágoras sin las condiciones necesarias.

- En el problema N° 8 a, la alumna N. O., responde:

“$2000 \times 100 = 2000000$”

El error aquí según Movshovitz-Hadar, Inbar y Zavlavsky (1987) es del tipo VI ya que ocurre al tomar los datos de la tabla y realizar incorrectamente el cálculo.

---

[2] Tanto la ortografía como la sintaxis usada por los/as resolutotes/as, con todas sus peculiaridades y desviaciones gramaticales, han sido respetadas con la finalidad de transmitir a las lectoras y a los lectores una imagen exacta de las fallas de lenguaje en las respuestas.

- En el problema N° 3 el alumno C.C. escribe:

Datos:
950 alum
$x+28+$var
var = ?
x = ?

$$x+x+28=950$$
$$2x=950-28$$
$$2x=922$$
$$x=\frac{922}{2}$$
$$\boxed{x=461}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Hembra}=489\\ \text{Varones}=461\end{array}}$$

461 + 28
489

Aquí hay un caso de un razonamiento ilógico, sin embargo el cálculo es correcto y el resultado bueno. Según Movshovitz-Hadar, Inbar y Zavlavsky (1987) el error es del tipo II por interpretación incorrecta de símbolos gráficos.

- En el problema N° 5 la alumna C. C. responde:

“la mayor posibilidad de ganar esta en el tablero 2
Porque tiene meno cuadro negro que el 1”

Este es un caso patético de razonamiento ilógico, cálculo incorrecto y resultado malo. Según Movshovitz-Hadar, Inbar y Zavlavsky (1987) el error es del tipo la alumna le asigna a la información un significado inconsistente con el enunciado.

- En el problema N° 1 la alumna M. E. F. responde:

“Techo plano mide $11m\times 8,5m=93,5m^2$

$$1m^2\to 25.000Bs$$
$$93,5m^2\to x$$
$$x=\frac{93,5m^2\cdot 25.000Bs}{1m^2}=654.500Bs$$

En el cual ella hace un razonamiento lógico, un cálculo correcto y sin embargo la respuesta es mala. Según la clasificación de Movshovitz-Hadar, Inbar y Zavlavsky (1987) el error aquí se presenta cuando cada paso en la realización es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si la alumna hubiese contrastado la solución con el enunciado el error habría podido evitarse.

- En el problema Nº 2 a, la alumna A. M. A., responde:

“640.000 + los gastos que hace para sus hijos
gastara como 750.000”

Según Movshovitz-Hadar, Inbar y Zavlavsky (1987) el error es del tipo III ya que ella hace una inferencia no válida lógicamente.

- En el problema Nº 3, la alumna A M A, responde:

“yo pienso que hay 28 hembras y 10 varones.
El total es 38 alumnos que van al museo”

Según Movshovitz-Hadar, Inbar y Zavlavsky (1987) el error es de dos tipos I (datos mal utilizados) y V (falta de verificación en la solución). Según Páez (sf) existe un desconocimiento casi total de aspectos fundamentales del lenguaje matemático (la no utilización de una ecuación)

- En el problema Nº 5, el alumno F. E., responde:

“yo digo que es depende
como lance el dado.
ya que muy fuerte
O ha pulso. y también
Como lances a la casilla”

Según Movshovitz-Hadar, Inbar y Zavlavsky (1987) el error se produce por falacias de razonamiento (tipo III). Según Brousseau, Davis y Werner (1986) el error es debido a una concepción inadecuada acerca de las probabilidades.

- En el problema Nº 6, el alumno R. Z., responde la parte a así:

“6 columnas”
y la parte b así:
"162000
1080000
540000
271000
810000
———
3403000
Gasta de total de
3.403.000”

Según Radatz (1980) el alumno comete el error en la parte a por dificultad para obtener información espacial. En la parte b, según Brousseau, Davis y Werner (1986) el alumno utiliza métodos imperfectos con concepciones inadecuadas. Según Movshovitz-Hadar, Inbar y Zavlavsky (1987) el error es del tipo I (datos mal utilizados)

- En el problema Nº 1 la alumna Y. A., responde:

“hay que multiplicar esta cantidad
que es 11m, 8,5m y depende
lo que de ese es el costo por
metro cuadrado.”

Según Movshovitz-Hadar, Inbar y Zavlavsky (1987) el error es del tipo I ya que la alumna hace una lectura incorrecta del enunciado. Según Andonegui (1992) hay procedimientos equivocados, aplicaciones desacertadas y ausencia de prerrequisitos al tópico específico.

- En el problema Nº 4 b la alumna Y. A, responde:

“si los tanques tiene
un costo de15.000 Bs.
por cada 3000 litros de
agua tiene que pagar depen
de lo que compre y cuanto
cuesta cada litro de agua
si son 30.000 litro de agua
sera 45.000 Bs”

- En el problema Nº 1 la alumna S. S., respondió:

$$"11m + 8,5m = 19,5m^2$$
$$19,5m^2 \times 25.000 = 487.000"$$

Según Movshovitz-Hadar, Inbar y Zavlavsky (1987) el error es del tipo I (datos mal utilizados) y II (errores de cálculo). Pero según Radatz (1980), el error es del tipo 3 ya que éste es debido a un aprendizaje deficiente de conceptos previos y a un conocimiento inadecuado de hechos básicos.

- En el problema Nº 8 la alumna C. A., contestó:

a.- “Habían aproximadamente 2.000.000 de personas”
b.-“Hay más hembras a partir de 70 años que varones, por lo tanto, el grupo de las hembras es mayor.”
c.-“Si, porque aproximadamente hay 400 hembras y casi 600 varones”
d.-“El grupo de las hembras ya que el renglón de 70 años o más es mayor al de los varones
e.-“En el renglón de 0 a 4 años.”

4.4.-Exposición de los juicios de expertos

En la entrevista realizada a los/as profesores/as de Matemática de la tercera etapa de Educación Básica se formularon siete preguntas relacionadas con la vinculación de la Matemática en la vida cotidiana. Las preguntas tenían como objetivo vislumbrar si la Educación Matemática aporta soluciones concretas y viables a problemas del entorno social de las alumnas y de los alumnos. La mayoría de las y los docentes coincidieron en muchas de sus respuestas.

PREGUNTA 1

¿Cuál cree usted que es la situación actual de la enseñanza de la Matemática en el 8º grado de la Educación Básica?

A los/as alumnos/as de octavo grado o de cualquier otro nivel de educación, siempre se le detectan fallas que traen de los niveles precedentes, las cuales impiden un buen aprendizaje del nivel actual en el que se encuentra el alumno, en este sentido el profesor D.R. señala:

> Algunos logran dominar las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división; pero cuando llegan a un noveno grado no les sirve absolutamente de nada esa matemática que supuestamente han aprendido, es un trampolín y el que logre saltar pasa y continúa preparándose para el próximo.

Del universo de respuestas destaca la de la profesora R.O. que comenta “algunos alumnos tienen mucha dificultad para aprender los objetivos nuevos y esto los retrasa”. Otro punto importante en el que los profesores manifestaron mucha preocupación es el relacionado con las pocas horas académicas dedicadas a la asignatura por semana, es este sentido A.A. expone:

> Podemos dar el contenido, pero en realidad para que los alumnos se ejerciten en el aula y logren el objetivo hay que dedicarles más tiempo del planificado, y eso trae como consecuencia al final del año escolar que gran cantidad de temas no se dicten ya que los programas de matemática de la tercera etapa están muy recargados de contenidos y para poder dominarlos a plenitud por los alumnos es necesario que la carga académica semanal aumente.

Otros/as entrevistados/as piensan que la situación actual de la enseñanza de la Matemática tanto de octavo grado como de cualquier otro radica en la cooperación de los padres y representantes que complementen con su ayuda y dedicación al mejoramiento intelectual de sus representadas y representados, en este marco destaca el comentario de la profesora y madre de un alumno C.B.:

> La participación de los padres en la educación de sus hijos es muy importante y no es suficiente con inscribirlos en la escuela y comprarles los útiles y esperar que el profesor haga lo demás, ya que el profesor necesita que los padres ayuden a que los alumnos adquieran hábitos de estudio y además que los representantes no se dejen engañar con los hijos ya que les hacen creer que están estudiando y la verdad es que muchos duran horas distraídos frente al libro o cuaderno de apuntes. Estar además pendientes y atentos a las tareas diarias que les asignan los profesores a sus hijos, y si el alumno les dice que no les mandan tareas ir personalmente y hablar con el profesor, ya que muchos estudiantes ante tal pregunta le mienten a sus padres

En relación con el poco tiempo que tienen los profesores para dictar el contenido de matemática de octavo grado como del resto de los grados, hay profesores que cubren de manera parcial el programa de estudio, en esta dirección comenta R.V. “doy pocos temas en el año escolar pero logro que los alumnos alcancen los objetivos”.Más pesimista resulta el comentario del coordinador del departamento de matemática de un instituto educativo profesor D.R quien argumenta:

> Hay profesores que dan pocos contenidos y ni siquiera así los alumnos logran los objetivos, pero hay otro caso que es el de los profesores que lo que les importa es cubrir todo el contenido del programa sin importar si los alumnos aprenden o no a aplican dicho contenido

De las respuestas anteriores se induce a un deterioro paulatino de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, y por consiguiente el nivel de excelencia en la educación venezolana esta lejos de lograrse, ya que es una asignatura básica y muy importante para el desarrollo intelectual e integral del ser humano.

PREGUNTA 2

¿Qué hace la institución y sus colegas dedicados a la enseñanza de la Matemática para mejorar o cambiar la situación actual?

Las profesoras entrevistadas y los profesores entrevistados trabajan en varias instituciones educativas, y además tienen varios años de servicio y no hablaron en particular de la institución involucrada en la investigación sino que se expresaron en general de lo observado por ellas y ellos en las instituciones donde laboran y han laborado y de las conclusiones extraídas de tertulias entre colegas con respecto a la enseñanza de la matemática. He aquí algunas de las respuestas:

> En muchas instituciones los departamentos de Matemática no desempeñan un trabajo en equipo sino que hay muchas individualidades y no se tiene un control de las actividades realizadas por los profesores y en definitiva cada quien hace lo que quiera.
>
> Hay instituciones que buscan tomar lo correctivos para mejorar la situación actual de la enseñanza de la Matemática, pero sin la colaboración de los docentes que persisten en trabajar individualmente y no en equipo va a ser muy poco lo que se pueda hacer.
>
> Ya que son muchos los docentes de matemática que no estudiaron esta asignatura sino otras carreras; abundan los ingenieros y economistas que por no conseguir trabajo en sus áreas se dedican a la docencia.

La profesora R.O. arguye *"Los docentes después que se gradúan, salen a la calle y no hay una revisión posterior de los conocimientos que van surgiendo".*

Uno de los profesores entrevistados planteó el siguiente caso:

> En una unidad educativa los alumnos que aprobaban la segunda etapa de educación básica llegaban a séptimo, pero con muchas fallas en matemática y el correctivo tomado por la institución fue que hicieron un análisis para ver cual era el aprendizaje que esperaba el profesor de matemática que deberían tener esos alumnos que ingresan a esa nueva etapa para luego reforzarles ese aprendizaje en primaria a los próximos egresados de ese nivel, asignándoles un profesor particularmente para el área de matemática que hiciera hincapié en los puntos indicados por el docente de Matemática de la tercera etapa.

No puede pasar desapercibido el hecho de que en la Escuela Básica las profesoras y los profesores y las instituciones en vez de buscar algún mecanismo para elevar la eficiencia y rendimiento de las alumnas y de los alumnos, optan por disminuir el nivel de exigencia para que éstas y éstos, de esta manera, aprueben; en este sentido agrega el profesor R.O. "pero hay que estar concientes de que la solución no es bajar el nivel de exigencia sino buscar los mecanismos para que los estudiantes le pongan interés al compromiso que tienen consigo mismos y con el país".

PREGUNTA 3

¿Qué piensa usted en cuanto a la idea de enseñar algunos contenidos matemáticos con situaciones de la vida diaria?

Los profesores coinciden en que la Matemática no se puede desligar de la vida cotidiana. Algunas de las respuestas fueron:

> Si se relacionan los problemas de aplicación con situaciones cotidianas la apatía que muestran los alumnos hacia la matemática puede disminuir y así parecerles menos aburrida, ya que lo que piensan de esta ciencia es que un completo aburrimiento.
>
> Hay muchos contenidos matemáticos que se pueden enseñar enfocándolos con problemas que estén relacionados con la cotidianidad.
>
> Sería bueno para los alumnos este tipo de enseñanza para que se les aclare la duda de la utilidad de la matemática ya que siempre se preguntan ante una explicación del profesor en diversos contenidos para que sirve eso y así darse cuenta que la matemática está en todo, es la vida misma y es utilizada hasta sin darse cuenta que lo están haciendo.
>
> Hay muchos contenidos matemáticos que se pueden enseñar con situaciones de la vida diaria, como por ejemplo la geometría, la probabilidad, la estadística, etc.
>
> Muchos docentes que aún sabiendo matemática, no saben ligarla con situaciones de la vida, ni a él mismo le sirven esos conocimientos.

PREGUNTA 4

¿Está usted de acuerdo con cambiar algunos contenidos sobre la enseñanza de la Matemática de los programas, libros de texto y demás actividades que realizan las y los docentes por otros que le permitan a la alumna y al alumno relacionar directamente la Matemática con la realidad?

La variedad de respuestas en cuanto a cambiar algunos contenidos de los programas y libros de texto se hizo notar. He aquí los ejemplos:

> El problema en sí, no está en los contenidos programáticos sino en la estrategia metodológica; al tener una respuesta como 'sí, pero depende mucho del profesor´ se insta al docente a asumir su rol protagónico en la necesidad de cambio que necesita el currículo de la Escuela Básica.
>
> El problema es que los programas están completamente llenos de conocimientos que los alumnos no usarán nunca, jamás serán aplicados, sí aplicarán algunos, pero no todos.
>
> El gran problema que existe con los libros de texto, es que uno no utiliza un libro único para dictar las clases durante el año escolar, ya que se da el caso de que un tema me gusta, como esta planteado en un libro y otro tema como esta planteado en otro libro.

Respecto al tema de los libros de texto el profesor D.R. expone:

> En cuánto a los libros de texto, los que utilizo son el álgebra de Baldor, los de Navarro, el Hoffman de cuarto y quinto, el de noveno de unos judíos y el de Jiménez Romero: 3650 ejercicios resueltos. Yo no cambiaría nada de ellos porque los utilizo parcialmente. Nunca he utilizado un único libro para un curso.

La profesora R.O. quien, además de directora de una unidad educativa y profesora de matemática y física y funge además como madre de tres alumnos de la misma institución que rige, plantea lo siguiente:

> Resulta que muchos profesores utilizan varios libros en el transcurso del año escolar habiendo pedido un libro de texto en particular a los alumnos, bien sea porque lo revisó y le gustó como estaba explicado unos temas y luego no le gustó como estaban explicados otros temas y se guía por otro texto; y también tenemos el caso de los profesores que no les exigen a los alumnos algún texto porque saben que no van a utilizarlo, pero los representantes le exigen que recomiende un texto porque en el trabajo le obsequian las listas escolares, al final el texto es poco utilizado por el docente.

El rol que desempeñan los libros de textos en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática es determinante en las prácticas educativas. No existe un libro de texto de octavo grado que pueda servir de orientación pedagógica a la alumna y al alumno. Estos libros, alejados de una excelencia necesaria, muestran debilidades didácticas quizás a la forma secuencial de plantear los contenidos.

PREGUNTA 5

¿Cuáles contenidos matemáticos del 8° grado pueden ser enseñados introduciendo temas de otras asignaturas o problemas sencillos cotidianos? Señale por favor su experiencia.

Ante esta pregunta, algunos de los docentes encuestados responden de las siguientes formas: "muchas veces los alumnos me han preguntado ¿para qué sirven esos productos notables? y argumentan que, en la vida real, es suficiente sumar, restar, multiplicar y dividir", "quizás las relaciones y las funciones puedan tener aplicación en la vida real", "Eso es muy difícil, cuando uno está enseñando polinomios ¿qué situaciones de la vida real pueden plantearse?" y muchos coinciden en la importancia de los números racionales. En este caso valen los comentarios del profesor A.A. quien acota "yo además de profesor de matemática soy músico y siempre les comento a mis hijos y a mis alumnos la importancia de las fracciones para la medida de los tiempos binarios y ternarios en la escritura musical" mientras que el profesor D.R. coordinador del departamento de matemática concluye:

> Los programas traen ejercicios relacionados con las diferentes asignaturas: la física con la matemática, la química con la matemática, lo que no se hace es hacer ver de una manera profunda esa relación entre las diferentes asignaturas; no se le hace énfasis al estudiante de la importancia que tiene la matemática con las otras asignaturas; el docente imparte la asignatura solamente por transmitir el conocimiento que está escrito en el programa limitándose únicamente a ese programa.

Relacionado con los problemas cotidianos, hay que destacar el comentario del profesor A.A.:

> A mi me gusta (cuando la coordinación me lo permite) salir al patio con los alumnos y con juegos de escuadras, cintas métricas y sus libretas de anotaciones; y medir la altura de los árboles, trazar en el suelo las medidas de una cancha de basketball (previa documentación de los profesores de educación física, simular un supermercado, analizar las probabilidades de ganar en el kino y en el triple gordo, previa consulta con una agencia de loterías.

Otras respuestas fueron:

> El problema es que nuestra educación es muy formal. Ella es muy rígida, no da la posibilidad para el trabajo participativo y constructivo.
>
> Faltan conocimientos sobre las mejores didácticas, los contenidos están deslindados totalmente de nuestra sociedad.

PREGUNTA 6

En algunos casos se pueden plantear a los alumnos situaciones para la enseñanza de la Matemática como la siguiente:

El tanque de gasolina de un carro tiene una capacidad de 60 litros. El conductor se da cuenta que tiene una reserva de 1/5 de su capacidad ¿cuánto habrá que pagar para llenar el tanque con gasolina con plomo, la cual cuesta 70 Bs./litro? (91 octanos). Últimamente también existe en Venezuela la gasolina sin plomo a un costo de 97 Bs./litro, ¿cuánto habría que pagar para llenar un tanque con capacidad de 80 litros con gasolina sin plomo? Las empresas automotrices hacen intentos por disminuir la cantidad de litros que requieren los motores en recorrer 100 Km. ¿Cuántos kilómetros recorrerá cada uno de los carros anteriores, suponiendo que el primero necesita 13 $^{l}/_{Km}$ y el segundo 7 $^{l}/_{Km}$? Comparar ambos carros según su rendimiento y el daño que le causa al medio ambiente. Discutir con los alumnos las desventajas y ventajas del uso del vehículo automotor.

¿Puede decirnos como trataría usted esta actividad en su curso?

Si hubo una coincidencia entre todas las profesoras y todos los profesores encuestados fue en relación a esta pregunta: todas y todos la dejaron en blanco.

PREGUNTA 7

¿Qué piensa Usted en cuanto a la idea de que los alumnos deberían trabajar en las clases de matemática situaciones que les permitan reflexionar críticamente sobre algunos problemas de nuestra sociedad? ¿Conoce Usted algunos ejemplos?

Las respuestas textuales se exponen a continuación:

> Sí deberían trabajar, pero no es tarea fácil, yo pienso que el sistema educativo como tal está divorciado de la realidad económica y social.
>
> Sí, en realidad podrían trabajar esto de la tasa de natalidad y mortalidad. En cuanto al presupuesto de la nación, ellos deben tener idea de dónde se saca el presupuesto, de dónde viene y cómo se va a repartir. Creo que el estudiante no lo sabe y muchos profesores tampoco, no se enseña así con esa intención. Se enseña el porcentaje desconectado del mundo. No se quiere ir más allá y creo que sí hay razones de que esto sea así. No se toman los periódicos como herramienta fundamental para una enseñanza matemática crítica. Sí estamos educando a nuestros niños con esa deserción y con esa idea de trabajar para el sistema en que vivimos, pero no para el cambio del mismo. No se enseña la matemática en esa dirección. Creo que aquí han fallado muchas cosas en la enseñanza de la matemática para el cambio y para una mejor vida de la población.
>
> Pienso que sí sería bueno, pero el tiempo no me permite una actividad así. Imagínate, yo doy clases al octavo B los lunes y los jueves de 7 a 8½, a las 7 en punto los muchachos cantan el himno en el patio, van llegando al aula a las 7 y 15 más o menos, luego pasando la lista se van unos cinco minutos, hago un recuento de la clase pasada o reviso las tareas, ¡que vá, es muy difícil!
>
> Yo le digo a mis muchachos que hay que prepararse desarrollando destrezas con los números, ellos le regalan mucho dinero a los comerciantes mediante las aproximaciones que a la larga representan mucho dinero para la gente y por supuesto para los comerciantes
>
> Yo enseño fracciones a mis alumnos abriéndoles los ojos con sermones como estos: si la gente no sabe nada de matemática entonces puede ser engañada con facilidad. Es incapaz de sacar alguna cuenta. No saben trabajar con las operaciones básicas. Tampoco son capaces de maximizar o minimizar los gastos de una casa. Si yo compro un kilo de leche en polvo me sale mejor que si compro un cuarto de kilo del mismo. Ese tipo de planteamiento no lo hace la gente, porque no saben dividir enteros, ni utilizar los porcentajes ni la regla de tres. Allí tiene que jugar la matemática un papel muy importante.

Capítulo 5: Propuesta

5.1.- Aspectos pedagógicos y didácticos sobre el método de proyectos

El método de proyectos conocido también como proyectos de aula o como "procedimiento de laboratorio o de correlación" (Valiente, 2000, 66) no es una idea nueva en comparación con otros métodos de enseñanza. "A pesar de que el término *proyecto* ha sido aplicado en casi todas las áreas del conocimiento, especialmente desde el punto de vista tecnológico, él no ha tenido suficiente repercusión en la práctica educativa y aún menos en el tratamiento didáctico de disciplinas específicas como la matemática y las ciencias naturales en los diferentes niveles del sistema educativo" (Mora, 2002a, 1). Pueden existir muchas razones que explican este fenómeno pedagógico, sin embargo, se considera que el motivo fundamental podría estar relacionado con la fuerza con la cual se ha afianzado la enseñanza clásica, centrada en la estructuración lineal y formal del conocimiento científico, más aún en áreas como la Matemática en su complejidad y amplitud. En tal sentido propone Mora (2002a, 1):

> Si deseamos una práctica educativa diferente a la impartida en los últimos dos siglos, entonces se necesita romper, en gran medida, con la forma de presentar y trabajar el conocimiento científico a los aprendices, cambiándolo definitivamente por otras ideas como la enseñanza por proyectos, las aplicaciones, la resolución de problemas, las estaciones de trabajo y aprendizaje, entre muchos otros métodos basados en el diálogo, la participación y la cooperación entre los integrantes de la práctica educativa, donde el trabajo didáctico esté centrado en los alumnos más que en los docentes y conocimientos, tal como lo han enseñado con tanta vehemencia y perseverancia pedagogos como Simón Rodríguez, John Dewey, Célestin Freinet, Antón Makarenko, Wolgang Schulz, Paulo Freire y Lawrence Stenhouse, quienes, al igual que otros estudiosos de la pedagogía, no dudaron en señalar que la educación tiene por objetivo lograr en todos los ciudadanos competencias interdisciplinarias, sociales y políticas. (:1)

Según Lanz (1997) el Proyecto Pedagógico de Aula es un instrumento de planificación de enseñanza con un enfoque global, que tomando en cuenta los componentes del currículo, se sustenta en las necesidades e intereses de la escuela y de los educandos a fin de proporcionarles una educación mejorada en cuanto a la calidad y equidad, es decir, una estrategia de planificación, concebida en la escuela, para la escuela y los educandos. Esto implica acciones precisas en la búsqueda de la solución de los problemas de tipo pedagógico, ejecutado a corto, mediano o largo plazo, en atención a las particularidades de cada proyecto que se desarrolle en distintas etapas o grados de estudio.

Entender el Proyecto Pedagógico de Aula desde este enfoque le da varias características particulares tales como:

- Contribuir a mejorar la calidad de la enseñanza.
- Servir de herramienta importante para la reflexión y el análisis de la práctica educativa, es decir, es un proceso de investigación que está ligado a la evaluación permanente y constante.
- Garantizar la coherencia y el sentido de todas las actuaciones docentes relacionadas con el trabajo de aula.
- Así mismo, los objetivos, contenidos y medios a ser utilizados permiten una evaluación comparativa de lo planificado, en relación con el proceso y los resultados obtenidos por los alumnos.
- Posibilitar la adaptación y redefinición de los proyectos a las nuevas necesidades detectadas.
- Tomar en cuenta los componentes del currículo referido al enseñar, cuándo enseñar, cómo enseñar y al qué, cómo y cuando evaluar.
- Considerar los actores que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje (alumno-docente) y las relaciones que se establecen entre ellos.
- Permitir la globalización e integración de los aprendizajes.
- Favorecer el aprendizaje, es decir, mediante el desarrollo de los proyectos de aula, los alumnos asimilan y atribuyen significado a los contenidos propuestos, para ello establecen relaciones entre los conocimientos previos que ya poseen.
- Facilitar el establecimiento de relación entre contenidos pertenecientes a varias áreas académicas entre contenidos diferentes de una sola de ellas.
- Contextualizar y adaptar los objetivos de etapa y de áreas, así como los ejes transversales y los contenidos de tipo conceptual, procedimental y actitudinal en atención a las características e intereses de los educandos, y a la realidad del plantel escolar.

- Establecer métodos, técnicas de enseñanza y actividades que permitan una adecuada intervención pedagógica en el aula.
- Ayudar a la toma de decisiones.
- Permite la organización y ambientación de las aulas, la distribución de espacios y tiempo, la selección de materiales y recursos didácticos, la distribución de las tareas entre el equipo docente y el establecimiento de un sistema compartido de evaluación.

Según Odremán (1997) los proyectos pedagógicos de aula se centran en los siguientes principios: globalización, investigación, evaluación y carácter sistemático. En los modelos globalizadores, afirman Coll y otros (1996) lo que justifica el aprendizaje de los contenidos no es su valor disciplinar, sino su capacidad para valorar, comprender e intervenir ante situaciones y conflictos de la realidad. Se globaliza la enseñanza, comenta Antunes (1992), cuando la selección de los contenidos de aprendizaje no se realiza por una decisión más o menos arbitraria, sino que se hace en función de atender necesidades de conocimientos o de dar respuestas a problemas más amplios que los estrictamente disciplinarios, de manera que el sentido que le pueda dar el alumno a lo aprendido le permite manejar unos recursos lo más potente posible para la comprensión y la actuación en contextos y situaciones reales (Antunes y otros,1992).

Según lo establece Briones (1995) el aprendizaje es significativo en la medida que produce una retención más duradera de lo aprendido, facilita la asimilación de los nuevos conocimientos relacionados con los aprendizajes previos y persisten más allá del olvido de los detalles que quedan al tener la información.

Los Proyectos Pedagógicos de Aula se inspiran en las metodologías globalizadas más conocidas como son: los centros de interés de Decroly (1950) y el método de proyectos de Kilpatrick (1967). Así mismo los Proyectos Pedagógicos de Aula incorporan otras formas de integración, como son:

- La integración a través de los contenidos de las distintas áreas académicas o disciplinas.

- La integración por temas que recojan las dimensiones y alcances de los ejes transversales.
- La integración a partir de temas de investigación.

El método global propuesto por Decroly (1950) se conoce desde 1906 y en la actualidad sigue teniendo vigencia como metodología didáctica coherente y sistemática. Avendaño y Cáceres (1999) explican que

> La metodología Decrolyana parte de temas de interés para los alumnos, vinculados con su realidad y vida cotidiana, es decir, son los alumnos quienes deciden el tema de interés a trabajar en el proyecto. El docente planifica las actividades alrededor del tema relacionado e integra los contenidos disciplinarios desde una perspectiva globalizadora, considera que el niño percibe y conoce a través de capacitaciones globales y que los conocimientos relacionados con un problema, deben estar subordinados al interés del alumno; a objeto de integrarlos cognoscitivamente en el todo definitivo por ese interés. (: 40).

El método de proyectos formulado por William Heard Kilpatrick, es otro enfoque globalizado, basado en que toda actividad educativa debe ser interesante para los alumnos y por lo tanto, son ellos quienes deben decidir el desarrollo de un proyecto.

Kilpatrick da la mayor importancia a las experiencias y vivencias que despiertan el interés del alumno para aprovechar su potencial de aprendizaje. Kilpatrick rechaza los aprendizajes configurados como materia que se le imponen al educando, porque considera que éste aprende de lo que vive, de las situaciones en que están inmersos, vistas como un todo, no fragmentadas, ni en compartimientos. Los proyectos de Kilpatrick buscan revivir en el aula la vida de la calle, dando solución a los problemas que el alumno se plantea en su vida diaria. Así en la planificación se plantean tres interrogantes. ¿Cómo tiene lugar el aprender? ¿Cómo el aprender interviene en la vida para mejorarla? ¿Qué género de vida es mejor?

Kilpatrick basa sus proyectos en:

- La investigación, ya que se plantea utilizar tratamientos de indagación sistemática en el aula, enfatiza no el resultado del proceso, sino el proceso mismo.

- La evaluación, ya que se persigue que el docente, el alumno y la familia sigan con facilidad el desarrollo de los proyectos como el proceso de construcción del conocimiento por parte de los alumnos. La participación de los padres y otros actores sociales es negociada.

El método de proyectos según Valiente (2000):

> Es un procedimiento didáctico que se aplica cuando la intención es que el alumno se enfrente a la solución de problemas que provienen de necesidades inmediatas que deben resolverse en el entorno real; considera de suma importancia la iniciativa del alumno, la que es utilizada por el profesor orientando estrategias, proponiendo mecanismos, eliminando dudas y ofreciendo referencias diversas a fin de que el alumno extraiga el conocimiento por su propia iniciativa y esfuerzo. (:73)

El procedimiento de proyecto se ha venido clasificando según Valiente (2000, 18) tradicionalmente en tres variantes, de acuerdo con el tipo de acciones que se desea resolver. Así se tienen:

- Los proyectos sobre construcciones
- Los proyectos sobre juegos
- Los proyectos sobre problemas

Los proyectos sobre construcciones abordan todo tipo de acciones que se refieren a la resolución de actividades que presupongan una realización material, sea una obra, una construcción o el desarrollo de un proyecto. Diseñar y delimitar un campo de fútbol, una cancha de baloncesto, dibujar a escala una mesa, construir un triángulo equilátero por medio de la papiroflexia (ver Apéndice Documental Nº 16) y diseñar la construcción de un pupitre son ejemplos que involucrarían este procedimiento.

Los proyectos sobre juegos se refieren a los que enfrentan la resolución e interpretación de juegos, entretenimientos, pasatiempos, rompecabezas y demás y cuya finalidad es apoyar, afirmar, enfrentar o basarse en conceptos matemáticos o llegar a ellos por medio de este recurso. Para este procedimiento se pueden dar como ejemplos el de calcular la suma de las caras ocultas de varios dados colocados en columnas, adivinar cuál es la ficha del dominó que se ha seleccionado, averiguar cuál es el número de granos de trigo que debería de haber suministrado el sultán a su súbdito Setta por haber inventado el juego del ajedrez, y adivinar cuál es la edad de dos personas usando una calculadora elemental.

Los proyectos sobre problemas involucran todo tipo de enunciados problemáticos en los que el cálculo numérico y literal debe ser la actividad preponderante. Entre este tipo de actividades se encuentran el determinar el costo de una mesa de madera que debe fabricarse en el taller de carpintería del liceo (existen muchos liceos en los que se imparte la asignatura Madera como área de exploración, ejemplo, el liceo Santiago Key Ayala), calcular la altura que tiene un árbol, y determinar el volumen de líquido que contiene el tanque de agua de servicio, midiendo previamente las dimensiones necesarias.

El método de procedimiento de laboratorio o de correlación, según Valiente (2000):

> Tiene por objeto estudiar la matemática en función de su aplicación en otras asignaturas; sólo así tiene sentido y significado su estudio y será factible que el alumno comprenda y asimile lo que de matematizable tiene un fenómeno de estudio. En términos generales, este procedimiento se entiende cuando es el alumno el que realiza las experiencias en el laboratorio,, considerando éste no como una sala especial, pues puede serlo el propio salón de clases, el patio de la escuela; esto es, el lugar de los hechos, donde las manipulaciones que se requieran hacer deberán permitir obtener los datos que permitan la resolución de problemas pertinentes. (:66)

El siguiente cuadro es tomado de Mora (2002a, 19)

Tabla 15: Etapas básicas del Método de Proyectos según Frey (1996)

Componentes	Características
I **Iniciativa**	Tanto las alumnas y los alumnos como las y los docentes **asumen** la iniciativa de la elaboración de un proyecto. Para ello se toman en cuenta las diferentes ideas, apoyando mediante la crítica constructiva los aportes de cada uno de los miembros. Tanto aquí como en la siguiente componente la democracia participativa es el eje fundamental de la relación entre los participantes.
II **Discusión**	Los alumnos y los profesores **debaten** sobre las diferentes posibilidades de realización de la iniciativa tomada en la primera fase. Allí se discute especialmente sobre dos preguntas básicas: ¿qué se tiene que hacer? y ¿qué se puede hacer? Aquí el grupo necesariamente debe ponerse de acuerdo y decidirse en cuanto a la factibilidad de la iniciativa original.
III **Planificación**	Después de haber llegado a un acuerdo democrático sobre el tema objeto del trabajo, los participantes proceden a una primera elaboración de un **plan de proyecto**. Aquí se tiene que establecer las fases del proyecto, las fechas probables, los subgrupos responsables, el presupuesto necesario, los recursos materiales, humanos y técnicos disponibles y necesarios. Debe existir, además, una fundamentación donde se den las razones por las cuales se ha decidido desarrollar ese proyecto particular.
IV **Desarrollo**	Después de haber superado la fase de planificación y de disponer de los recursos necesarios e indispensables se procederá a su **realización**. Hay que insistir que la fase de planificación no se cierra en su totalidad. Ella está presente permanentemente durante todo el desarrollo del proyecto. Ésta es la fase, obviamente, más rica y activa del proyecto, Allí surgen diferentes problemas no previsto en el plan original. Aquí se pone de manifiesto la creatividad y las habilidades de los participantes, de acuerdo con las sorpresas que van apareciendo durante el desarrollo del proyecto.
V **Culminación**	La **culminación** del proyecto no debe limitarse simplemente a la presentación parcial o total de los resultados obtenidos durante la realización. Esta fase es mucho más compleja de lo que normalmente piensan quienes se disponen a desarrollar el proceso de aprendizaje y enseñanza orientado en este método. En muchos casos se termina un proyecto con la obtención final de un producto. Éste, juntamente con los resultados escritos, debe ser presentado públicamente para el conocimiento y opinión de los demás miembros de la comunidad escolar y extraescolar. Los autores citados anteriormente no hablan explícitamente de una ase de evaluación, lo cual es fundamental para la presentación final de resultados.
VI **Reflexión**	Esta fase, expuesta solamente por Frey (1982 y 1996) es opcional y depende de la duración total del proyecto. Ella tiene sentido solamente si el proyecto es muy largo, lo cual requiere un momento de **contemplación y reflexión**. Aquí todos los participantes tienen la oportunidad de discutir nuevamente el estado del desarrollo del proyecto, inclusive después de haber presentado públicamente los primeros resultado. Esta componente ayuda a tomar el rumbo correcto cuando el grupo ha perdido su orientación o se encuentra disperso o desmotivado. Sería algo así como una evaluación formativa intermedia con la finalidad de corregir fallas que se vienen cometiendo en la realización del proyecto y así estimar su continuación.
VII **Metainteracción**	La séptima y última componente la ha catalogado Frey (1982 y 1993) como **metainteracción**, ya que ella se refiere a un momento en el cual las y los participantes discuten amplia y abiertamente sobre todo lo acontecido en el desarrollo total del proyecto. Mediante la crítica y la autocrítica tanto las alumnas y los alumnos como las profesoras y los profesores exponen sus puntos de vista sobre los detalles que influyeron, en algunos cados de manera determinante, en el proceso y resultados finales. La metainteracción también es una fase opcional y podría formar parte de con la anterior, de la fase de evaluación, la cual no ha sido establecida explícitamente por los autores consultados.

5.2.- Proyectos

De los cuatro proyectos que se proponen sólo el primero está dirigido a las alumnas y a los alumnos, los otros tres están dirigidos a las y los docentes. En el Proyecto Nº 1 las primeras actividades están orientadas a todas las alumnas y a todos los alumnos de la sección con la cual se va a trabajar, mientras que las actividades complementarias están orientadas a aquellas alumnas y a aquellos alumnos con mayor interés hacia la Matemática, en la mayoría de los casos este grupo lo forma un 10% de la sección (Rico Romero, 1997b, 243)

Se trata de proyectos que giran en torno a una idea fundamental *el agua* (en los dos primeros), el *balón de fútbol* en el tercero y *códigos* en el cuarto. Esta modalidad de planificación permite abordar el conocimiento de una manera integrada. Los resultados se esperan satisfactorios.

5.2.1.-Presentación

Los proyectos "**El agua: un recurso escaso", "El peñero del pescador", "La estrella de la vinotinto"** y **"Algunos códigos"**, constituyen una pauta de acción pedagógica que guía la enseñanza en procesos, presentando el conocimiento al discente dentro de su característica esencial de la integralidad y no como parcelas aisladas sin relación alguna, por tanto estos trabajos reflejan rasgos de un modelo de planificación que constituye un intento por cambiar los esquemas tradicionales estructuralistas y construir uno que permita desarrollar procesos de enseñanza más significativos.

Fueron diseñados para los siguientes niveles:

El agua: un recurso escaso para el 2° año del Ciclo Diversificado.
El peñero del pescador para el 9° grado de la Escuela Básica.
La estrella de la vinotinto para el 7° grado de la Escuela Básica.
Algunos códigos para el 2° año del Ciclo Diversificado.

5.2.2.-Justificación

La planificación en Venezuela se ha caracterizado por estar centrada en el desarrollo de los objetivos específicos dentro de área de estudio, en consecuencia, ella responde más a las exigencias d un programa, que a las necesidades e intereses de los actores del proceso educativo. La planificación es una actividad para la y el docente cuando se quiere plantear en una forma congruente con las nuevas perspectivas teóricas educativas, en este caso, el constructivismo, el cual plantea retos al profesorado por concebir la enseñanza como un hecho intencionado encaminado a generar una transformación holística en los individuos, comprendiendo lo conceptual, procedimental, actitudinal y por ende lo valorativo, con miras a una formación integral. Así, el educando construye las herramientas para asumir en un futuro su vida en forma autónoma y consciente, pues ya no se trata de repetir información, sino de potenciar un proceso de construcción de aprendizajes significativos; surge entonces la necesidad urgente de experimentar en la práctica pedagógica metodologías más pertinentes y convenientes, determinando su viabilidad y contribuyendo a la sistematización de la misma.

En cuanto se haga posible interiorizar en el educador la importancia de los procesos en los que participa, en esa medida se garantizará el cumplimiento real de los fines educativos, para lo cual se torna fundamental el diseño y puesta en práctica de modelos de planificación que hagan verdaderamente suya la autonomía que, como docentes, se les asigna.

5.2.3.- Objetivos

a) Objetivos generales

- Ensayar una propuesta de la enseñanza con la incorporación de variados recursos y elementos didácticos, que faciliten aprendizajes significativos al discente y al docente en pro de una formación integral.

- Crear un ambiente de comunicación, donde el alumno sienta seguridad para expresar inquietudes y a su vez se le permita reflexionar sobre su situación.

b) Objetivos específicos

En el momento del diseño del proyecto, los objetivos específicos surgieron al dar respuesta a la pregunta: ¿para qué? Sin embargo, es pertinente señalar que los mismos fueron concebidos como pautas generales para orientar la acción, más que parámetros rigurosos y segmentados para evaluar aprendizajes en términos conductuales. Así surgen los siguientes:

Para la y el discente	Para la y el docente
• Resolver problemas matemáticos relacionados con las temáticas abordadas en el desarrollo de los proyectos. • Desarrollar su potencial creativo mediante la elaboración de figuras geométricas. • Investigar tópicos matemáticos que surjan durante la realización de las actividades. • Utilizar correctamente utensilios de medición. • Analizar datos estadísticos.	• Permitir que la y el discente aborden el conocimiento de manera integral, respetando así su nivel intelectual al relacionar los diversos contenidos programáticos. • Estimular la creatividad a través de la ejecución de distintas actividades que promuevan la imaginación. • Hacer uso de una evaluación cualitativa, continua y sistemática. • Contribuir a la formación de una conciencia social. • Incentivar a la lectura diaria del periódico haciendo énfasis en las noticias o imágenes relacionadas con la Matemática.

5.3.- Proyecto Nº 1: El agua: un recurso escaso

Fuente:
www.terra.cl/guia_practica/seguridad_comodidad/index.cfm

Fuente: www.paho.org/Images/PED/agua.jpg

Guía de actividades para los alumnos

Dirigido a alumnos y alumnas del segundo año del Ciclo Diversificado

Instrumentos a utilizar

Vernier	5 láminas de acrílico	Tubo de silicona	Cronómetro	Cuaderno
lápiz	Regla graduada	Un tobo	Una calculadora	Un pañito

Actividad Nº 1: Lee las siguientes noticias:

EL NACIONAL - **MARTES** 14 DE MAYO DE 2002

Las mejoras podrán observarse en un mes

Represas se recuperan paulatinamente

Los embalses alcanzarán sus niveles normales sólo con dos años de lluvias fluidas o con una temporada especial. Si los valores se restablecen en 30%, Hidrocapital podrá ofrecer el servicio sin molestias hasta el año próximo

YELITZA IZALLA YÁNEZ

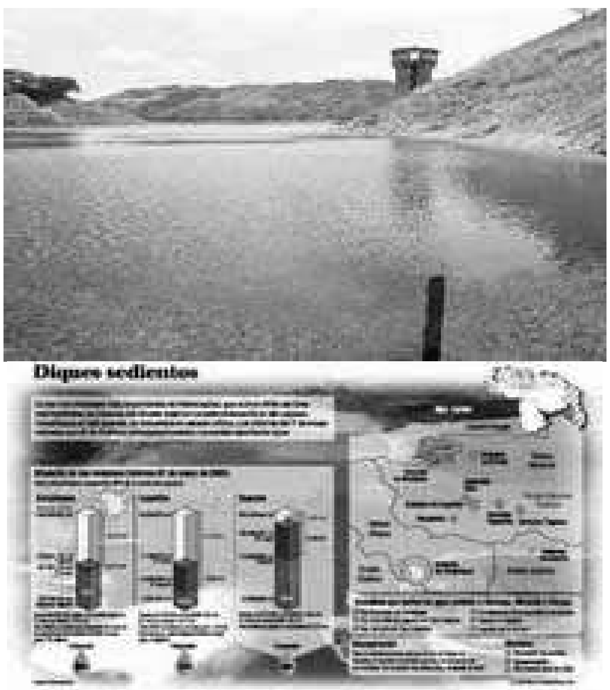


Foto RAMÓN GRANDAL
El embalse de Camatagua tiene un déficit de 1.082 millones de metros cúbicos de agua

A principios del año pasado los embalses que nutren de agua al país ya presentaban una situación difícil, pues no había llovido como se esperaba. Sin embargo, la situación era sostenible y no hubo motivo de alarma hasta que avanzaba el segundo semestre del año, cuando el período lluvioso fue extremadamente seco y poco aportó a las represas. Las consecuencias de esta situación se han reflejado con más intensidad en lo que va de 2002, pues se han alcanzado cifras críticas en algunos puntos claves como Camatagua, que surte al 50% del área metropolitana de Caracas; y Turimiquire, en el occidente del país. "Los tres surtidores más importantes del área metropolitana de Caracas (Camatagua, Lagartijo y Taguaza), que proveen 90% del servicio, han llegado a niveles de descenso históricos", dijo el coordinador de la Sala de Operaciones de Hidrocapital, Paolo Zotti.

Camatagua es el más importante y es el que menos se ha recuperado. "Ha descendido 20,03 metros, es decir, hay un déficit de 1.082 millones de metros cúbicos, y es la primera vez, desde 1985, que alcanza estos niveles. Estas cifras equivalen a que no tenemos 890 días de servicio asegurado y por ello se debe hacer el racionamiento", explicó.

Con las últimas precipitaciones, Taguaza -que opera 15% del servicio de agua potable-, se ha ido recuperando. Su déficit actual es de 3,47 millones de metros cúbicos y desde agosto ha recuperado 11,40 millones de metros cúbicos por segundo. En el caso de Lagartijo -que provee 35% del servicio- su descenso en la época de sequía fue de 30 millones de metros cúbicos y hasta los momentos ha recuperado sólo 10,39 millones de metros cúbicos. Según la presidenta de Hidrocapital, Jacqueline Faría, "los niveles normales en los embalses sólo se podrán alcanzar con dos años de lluvias fluidas o con una temporada especial". Según los pronósticos del tiempo, se espera que la mejora en las principales represas se vea entre este mes y el que viene. "Lo más deseable es que alcancen los valores óptimos y que se recuperen por lo menos 30% para poder ofrecer el servicio sin molestias hasta el año próximo", indicó Zotti.

El país en alerta

La situación en los demás embalses del país tiende a ser normal debido a que el período de lluvia ha sido fructífero, incluso ha comenzado antes de mayo. "Pero por este comportamiento de la naturaleza no vamos a confiarnos. Ahora más que nunca tenemos que ser precavidos y mantener los esquemas de racionamiento hasta tanto haya una tendencia franca de recuperación de los embalses, que todavía, pese a las mejoras, no se ha manifestado. Eso lo sabremos en agosto", informó el presidente de Hidridrovén, Cristóbal Francisco.

La situación en las represas está controlada por lo que las autoridades garantizan el servicio y, además, donde se mantienen los racionamientos éstos no pasan de 20. %"En Camatagua los niveles no han subido, pero afortunadamente han dejado de bajar. En Zulia, los niveles del surtidor Tule-Manuelote me llevan a afirmar que no están en una situación crítica y que podemos garantizar el servicio", dijo Francisco. La represa de Turimiquire (que atiende a Nueva Esparta y regula la toma de Cunaguaro que surte a Anzoátegui) alcanzó niveles de descenso históricos, pero actualmente no presenta una situación de alarma, gracias a las últimas precipitaciones que se han presentado. En el caso de Hidrocentro, que atiende a Aragua y Carabobo, Francisco informó que han podido superar la crisis porque se inició la recuperación del embalse Paucachinche, "el cual fue rehabilitado con la intervención del cuerpo del embalse y ahora está operando normalmente". En el eje Morón-Puerto Cabello el problema de la sequía se agudizó debido a los inconvenientes que causaron unos pozos perforados. Esto ocasionó que al acueducto se le aplicara un plan de austeridad para su funcionamiento.

En Táchira y Barinas, donde la situación se tornó crítica ya no hay racionamiento, porque los ríos comenzaron a abundar y tienen mejores caudales. "En el caso de Guárico, donde se presentaron problemas en San Juan y Tucupido, está dominada la situación. Mientras que en Falcón se mantiene 16% de racionamiento", dijo el presidente de Hidrovén.

Temporada productiva

Una de las ventajas que se ha presentado este año es que en el período seco han habido lluvias extraordinarias. Como prueba de ello el jefe de información del Servicio de Metereología de la Aviación, José Pereira, nombró que en enero hubo lluvias extraordinarias en Margarita, los llanos centrales, Maturín, el resto de Monagas, Bolívar y oriente.

“En marzo, cuando el período (de lluvias) aún no comenzaba, hubo muchas precipitaciones, incluso llovió tres vences más de lo normal en Barquisimeto, Barcelona y Margarita”, afirmó Pereira. Sólo en septiembre se sabrá cuál fue el comportamiento de la época lluviosa y los beneficiosa que fue para la recuperación de los embalses. “El tiempo es impredecible y las lluvias pueden intensificarse, incluso alargar el período lluvioso, pero igualmente podemos entrar en una época de sequía”. Pereira asegura que, hasta los momentos, está lloviendo 50% más de lo normal y que esa cifra puede aumentar, pues todo parece indicar que esta es una temporada especial, a diferencia del año pasado cuando la sequía fue intensa y se presentaron situaciones anómalas en las temporadas húmedas. “Por El Niño no debemos preocuparnos, porque según los pronósticos este año no afectará las costas venezolanas”.

Paso a paso

Para esta época los representantes del Servicio de Meteorología de la FAV, guiados por las condiciones y los cambios climáticos mundiales, estiman que la zona de convergencia intertropical esté muy activa para los meses de junio, julio, agosto y septiembre.

· Región centro norte costera: el inicio del período lluvioso comenzó en la segunda quincena de abril en Carabobo y a mediados de mayo se iniciará en Aragua, Miranda y Distrito Capital. En el caso de Maiquetía, donde no hay período lluvioso definido, “es posible que las precipitaciones se incrementen desde junio hasta noviembre, coincidiendo con la temporada de huracanes”, indica el informe de la FAV.

· Región centro occidental: a finales de abril comenzó el período en Portuguesa y en la segunda quincena de mayo se espera que inicie en Lara y parte del sur de Falcón. “Aunque el norte del estado Falcón no tiene un período lluvioso definido, es posible que las precipitaciones se incrementen en junio y noviembre, debido al pasaje de ondas y perturbaciones tropicales”, según cita el informe.

· Región de Los Andes: para esta parte del país el período lluvioso comenzó a finales de marzo, especialmente en Trujillo y Mérida. En el sur de Táchira las lluvias comenzaron a principios del mes pasado y el área norte del estado a finales de abril.

· Región Zuliana: en esta zona el comienzo de la temporada se inició en el oriente de la región en abril y en la zona norte comenzará a finales de mayo. “Aunque Maracaibo está situada al norte del estado la pluviosidad se incrementará considerablemente desde agosto hasta octubre, este lapso coincide con el paso de ondas y perturbaciones tropicales la norte de Venezuela”.

· Región de los Llanos Centrales: En la segunda quincena de abril se inició la temporada de precipitaciones en Barinas y el sur de Apure. En este mes deben comenzar en el norte de Apure y sur de Guárico.

· Región nor-oriental: el inicio del período se está dando en partes: para el área sur de la región se comenzará este mes y hacia la zona norte costera en la primera quincena de junio. No se tomó en cuenta Nueva Esparta, porque no posee un período lluvioso definido, “ya que las precipitaciones son causadas por el paso de perturbaciones tropicales, especialmente las ondas del este”.

· Región de Guayana y Amazonas: a finales de marzo comenzó el período de lluvia en el sur de Guayana y Amazonas, a mediados de abril afectó la zona norte de Amazonas y el centro de Guayana.

Diques sedientos

En los tres embalses más importantes de Hidrocapital, que nutren 90% del área metropolitana de Caracas, los niveles bajaron considerablemente el año pasado. Camatagua, el más grande, se encuentra en estado crítico, y el informe del 7 de mayo indicaba que el río Guárico, principal proveedor, no estaba aportando agua

Situación de los embalses (informe 07 de mayo de 2002)

Estos tres embalses representan 95% de la producción general

Camatagua

Volumen normal 1.543.000.000 m3

20,03 m3

679.827.199 m3 1 agosto

461.981.318 m3 07 mayo

>-5,17 m3

193.760.000 m3 Volumen muerto

Desde el 01/01/02 hasta el 31/03/02: 3,09 m3
En abril ha bajado: 1,13 m3
Para 2002 se calcula una descenso de 4,22 m3
Se calcula que para finales de 2002 el nivel será: 175 MMm3

Producción 60%

Lagartijo

64.839.367 m3

21,73 m3

11.186.342 m3 07 mayo

10.566.366 m3 01 agosto

10,39 m3

2.352.570 m3

Desde el 01/01/02 al 31/03/02: 6,5 m3
En abril ha bajado: 4,74 m3
Para 2002 se calcula una baja de 11,24 m3
Se estima que para finales de 2002 el nivel será: 21MMm3

Producción 15%

Taguaza

184 millones m3

3,47 m3

163.903.427 m3 07 mayo

11,40 m3

110.566.366 m3 1 agosto

16.000.000 m3

Desde el 01/01/02 al 31/03/02: 1,94 m3
En abril ha aumentado: 33 cm
Para 2002 se calcula un aumento de 2,27 m3

Producción 35%

Fuente/ Hidrocapital

Mar Caribe

Estado Vargas

Caracas

Embalse La Pereza

Estado Miranda

Embalse La Mariposa

Quebrada Seca

Parque Nacional Guatopo

Embalse de Lagartijo

Ocumarito

Embalse Taguacita

Embalse Taguaza

Estado Aragua

Embalse Guanapito

Estado Guárico

Embalse de Camatagua

Estado Guárico

Embalses que surten de agua potable a Caracas, Miranda y Vargas

- Tuy III se nutre de Camatagua
- Tuy II se nutre de Lagartijo, río Tuy y Taguaza
- Tuy I se nutre de Tuy y Lagartijo
- Camatagua es alimentada del el río Guárico
- Taguaza río Taguaza
- Lagartijo por el río Tuy

Recuperación

Para el funcionamiento óptimo de los embalses se necesita un periodo de lluvias normal y la aplicación de las medidas. Se necesitan dos años para, recuperar el nivel

Medidas

- Regulación del servicio
- Concientización
- Plan escolar para los niños

EL NACIONAL/ Rafael Pérez Vila

De lo leído en el periódico contesta las siguientes preguntas

1) ¿A que monto asciende el volumen de agua perdido en la represa de Camatagua?

2) ¿Qué porcentaje de agua le surte la represa de Camatagua al área metropolitana de Caracas?

3) ¿Cuántos litros hay en una profundidad de un metro en la represa de Camatagua?

4) Si el racionamiento comienza en la fecha de publicación del artículo ¿En qué fecha se consumirá la última gota de agua de la represa de Camatagua suponiendo sequía absoluta?

5) ¿Cuántos caraqueños se benefician del agua proveniente de las represas de Lagartijo y Taguaza?

Actividad Nº 2: ¿Qué es un litro?

1) Elabora un cubo sin tapa, utilizando 5 cuadrados de acrílico o plástico de 10 cm de arista.

2) Une los bordes utilizando silicona.

3) Llena con agua el cubo que construiste:

4) Vierte el agua del cubo en un envase, por ejemplo de leche o jugo, en el cual esté escrito que su capacidad sea un litro.

5) Compara los resultados obtenidos en (4) y (5)

(4) = (5) ☐ (4) < (5) ☐ (4) > (5) ☐

6) Escribe, en forma precisa, las conclusiones que consideras importante:

____
____
____
____
____
____
____

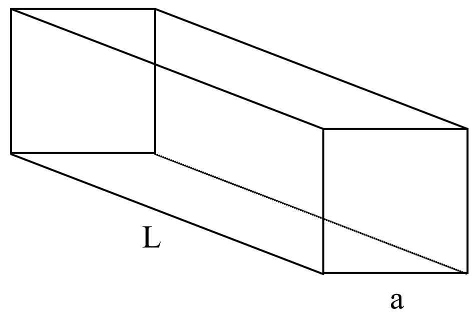
7) ¿Cómo hallarías el volumen del cubo construido?

____
____
____
____

8) ¿Podrías definir un litro?

____
____
____
____
____
____
____
____

9) ¿Podrías construir, hipotéticamente, envases con formas de paralelepípedo con aristas de medidas enteras (en mm) cuya capacidad sea de 1000 mm^3,es decir, un litro?.



Sí No

a) Calcula el área de una de las 6 bases, como ésta tiene forma rectangular la fórmula a utilizar es:

$$A_{rectángulo} = L \cdot a$$

b) Multiplica este producto por la altura h, y el valor obtenido es el volumen del paralelepípedo, es decir:

$$V_{paralelepípedo} = A_{base} \cdot h = L \cdot a \cdot h$$

c) Descompón en factores primos el número 1000 (aunque el 1 no es un número primo, colócalo como factor). Recuerda que los números primos son aquellos números naturales que tienen únicamente dos divisores, es decir, el 1 y el mismo número, ejemplos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc.

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 1 \\ 1000 & 2 \end{array}$$

$$1000 = 1 \cdot 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\delta}$$

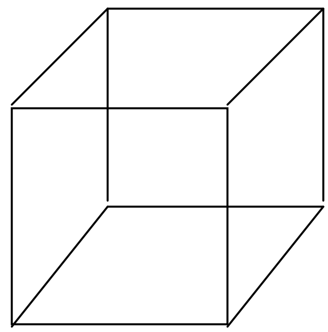
α	β	δ
En resumen 1000 se puede escribir como		

d) Utilizando, hábilmente las propiedades: asociativa y conmutativa, completa la siguiente tabla:

L	a	h	$L \cdot a \cdot h$
			1000
			1000
			1000
			1000
			1000
			1000
			1000
			1000
			1000

Actividad Nº 3: ¿Cuántos litros caben en el lavamanos de tu casa?

a) Gradúa, utilizando la regla, la altura del cubo que construiste de tal manera que sirva como submúltiplos de un litro que es la capacidad real del envase y que dicha escala te sirva para obtener un buen aproximado de lo que es un medio litro, un cuarto de litro, etc.



b) ¿Cómo podrías calcular la capacidad en litros de un tobo?

c) ¿Cuál es la capacidad en litros de un tobo?

d) ¿Cómo podrías calcular la capacidad en litros de tu lavamanos?

e) ¿Cuál es la capacidad en litros de tu lavamanos?

Actividad Nº 4: Ahorrar el agua

1) ¿Qué diferencias hay entre el agua tratada, el agua potable y el agua mineral?

2) ¿Cuánto pagan en tu casa por un litro de agua tratada?

3) ¿Cuánto pagan en tu casa por un litro de agua potable?

4) ¿Cuánto pagan en tu casa por un litro de agua mineral?

5) Coloca los resultados en la siguiente tabla:

1 litro de agua	Bs.
Tratada	
Potable	
Mineral	

6) Reparte entre los alumnos de las otras secciones la siguiente encuesta:

ENCUESTA

SEXO: Masculino Femenino

¿Cuántos vasos de agua consumes diariamente?

____

¿Cuántos vasos de agua crees deberías consumir?

____

¿Qué tiempo tardas cepillándote los dientes?

____

¿Cierras el grifo mientras te cepillas?

Sí   No

¿Qué tiempo tardas bañándote?

____

¿Cierras el grifo mientras te enjabonas?

Sí   No

¿Qué tiempo tardas lavándote las manos?

____

¿Cierras el grifo cuando te enjabonas las manos?

Sí   No

7) Vacía los resultados de la encuesta en las siguientes tablas:

RESULTADOS DE LA ENCUESTA

Muestra = Número de Personas Encuestadas =

SEXO	Número de Personas Encuestadas	%
Masculino		
Femenino		

¿Cuántos vasos de agua consumes diariamente?

s	Masculino						Femenino					
v	f	fr	F%	F	Fr	F%	f	fr	f%	F	Fr	F%
0												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												

¿Cuántos vasos de agua crees deberías consumir?

¿Qué tiempo tardas cepillándote los dientes?

X (min)	F	fr	f%	F	Fr	F%
(0,1]						
(1,2]						
(2,3]						
(3,4]						
(4,5]						
$(5,\infty)$						

¿Cierras el grifo mientras te cepillas?

Respuesta	Encuestados
Sí	
No	

¿Qué tiempo tardas bañándote?

t(min)	F	fr	f%	F	Fr	F%
Menos de 5						
De 6 a 10						
De 11 a 15						
De 16 a 20						
De 21 a 25						
De 26 a 30						
Más de 30						

¿Cierras el grifo mientras te enjabonas?

Respuesta	Encuestados
Sí	
No	

¿Qué tiempo tardas lavándote las manos?

t(min)	f	fr	f%	F	Fr	F%
Menos de 1						
1						
2						
3						
4						
5						
Más de 5						

¿Cierras el grifo cuando te enjabonas las manos?

Respuesta	Encuestados
Sí	
No	

Evaluación:

Presente un informe de las actividades en el cual describan con sus propias palabras lo que aprendieron con el proyecto con sus respectivas conclusiones.

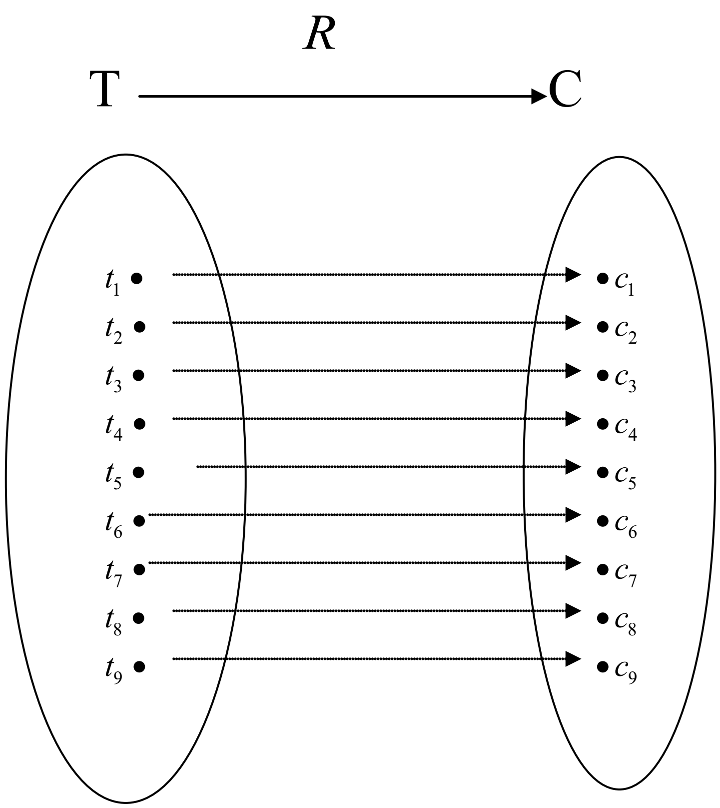
Actividades matemáticas complementarias

Actividad Nº 5: ¿Cuántos litros de agua salen del grifo del lavamanos de tu casa y en cuánto tiempo?

a) Utilizando un cronómetro y el cubo graduado, llena la siguiente tabla:

Tiempo	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
(seg.)	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Capacidad	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9
(litros)									

Mediante un diagrama de Venn podemos representar los datos tabulados en la forma:



Otra manera de representar los datos tabulados es por medio de un diagrama tabular:

c_9									●
c_8								●	
c_7							●		
c_6						●			
c_5					●				
c_4				●					
c_3			●						
c_2		●							
c_1	●								
R	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9

Con los conjuntos T y C definimos un conjunto llamado el producto cartesiano de $\mathrm{T}\times\mathrm{C}$ como:

$$\mathrm{T}\times\mathrm{C}=\{\,(t_i,c_j)\,/\,t_i\in T\ \ y\ \ c_j\in C\,\}$$

Convenimos que el par ordenado (t_i,c_j) es igual al par ordenado (t'_i,c'_j) si y solo si $t_i=t'_i$ y $c_j=c'_j$ para $1\le i,j\le 9$. En nuestro caso el producto cartesiano es:

$$\begin{aligned}\mathrm{t}\times\mathrm{C}=\{\,&(t_1,c_1),(t_1,c_2),(t_1,c_3),(t_1,c_4),(t_1,c_5),(t_1,c_6),(t_1,c_7),(t_1,c_8),(t_1,c_9),\\&(t_2,c_1),(t_2,c_2),(t_2,c_3),(t_2,c_4),(t_2,c_5),(t_2,c_6),(t_2,c_7),(t_2,c_8),(t_2,c_9),\\&(t_3,c_1),(t_3,c_2),(t_3,c_3),(t_3,c_4),(t_3,c_5),(t_3,c_6),(t_3,c_7),(t_3,c_8),(t_3,c_9),\\&(t_4,c_1),(t_4,c_2),(t_4,c_3),(t_4,c_4),(t_4,c_5),(t_4,c_6),(t_4,c_7),(t_4,c_8),(t_4,c_9),\\&(t_5,c_1),(t_5,c_2),(t_5,c_3),(t_5,c_4),(t_5,c_5),(t_5,c_6),(t_5,c_7),(t_5,c_8),(t_5,c_9),\\&(t_6,c_1),(t_6,c_2),(t_6,c_3),(t_6,c_4),(t_6,c_5),(t_6,c_6),(t_6,c_7),(t_6,c_8),(t_6,c_9),\\&(t_7,c_1),(t_7,c_2),(t_7,c_3),(t_7,c_4),(t_7,c_5),(t_7,c_6),(t_7,c_7),(t_7,c_8),(t_7,c_9),\\&(t_8,c_1),(t_8,c_2),(t_8,c_3),(t_8,c_4),(t_8,c_5),(t_8,c_6),(t_8,c_7),(t_8,c_8),(t_8,c_9),\\&(t_9,c_1),(t_9,c_2),(t_9,c_3),(t_9,c_4),(t_9,c_5),(t_9,c_6),(t_9,c_7),(t_9,c_8),(t_9,c_9)\,\}\end{aligned}$$

Una relación binaria o correspondencia de un conjunto T en un conjunto C es un subconjunto R del producto cartesiano de TxC. Si $(t_i,c_j)\in$ R, decimos que t_i está en la relación R con c_j o simplemente que t_i está relacionado con c_j y escribimos

$t_i \mathrm{R}\, c_j$, además, diremos que, T es el conjunto de partida y C es el conjunto de llegada de la relación R.

Si $R = \{ (t_1, c_1), (t_2, c_2), (t_3, c_3), (t_4, c_4), (t_5, c_5), (t_6, c_6), (t_7, c_7), (t_8, c_8), (t_9, c_9) \} \subseteq T \times C$ tenemos que R es una relación del conjunto T en el conjunto C.

Al tipo de relaciones R$\subseteq T \times C$ donde T y C son subconjuntos del conjunto de los números reales **R** las llamamos curvas.

En la tabla del ejercicio (a) trabajaste con números reales. Si consideramos la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales, obtenemos los números reales que se denotan con la expresión **R**.

$$\mathbf{R} := Q \cup I$$

El conjunto de los números racionales Q está formado por el cero y por las fracciones $\frac{a}{b}$ donde $a \in Z$ y $b \in Z^*$,éstas son expresiones decimales ilimitadas periódicas ($\frac{1}{2} = 0{,}4\widehat{9}$, $-\frac{4}{3} = -1\tfrac{1}{3} = -1{,}\widehat{3}$, $2 = \frac{2}{1} = 1{,}\widehat{9}$, $\frac{23}{24} = 0{,}958\widehat{3}$, $\frac{50}{13} = 3\tfrac{11}{13} = 3{,}846153$,etc.).

El conjunto de los números irracionales I está formado por las expresiones decimales ilimitadas no periódicas
($\sqrt{2} \approx 1{,}41...$, $\pi = 3{,}14159...$, $\sqrt[3]{4} = 1{,}58740105\ldots$, $e = 2{,}718182...$,etc.)

Llamaremos dominio de la relación R y lo denotaremos con *Dom* R al conjunto:

$$Dom\,\mathrm{R} = \{ t_i \in T / (t_i, c_j) \in R \text{ para algún } c_j \in C \} \subseteq T \text{ con } 1 \le i, j \le 9$$

Llamaremos rango de la relación R y lo denotaremos con *Rgo* R al conjunto:

$$Rgo\,\mathrm{R} = \{ c_j \in C / (t_i, c_j) \in R \text{ para algún } t_i \in T \} \subseteq C \text{ con } 1 \le i, j \le 9$$

Diremos que la relación R$\subseteq T \times C$ es igual a la relación S$\subseteq T' \times C'$ si y solo si $T = T'$, $C = C'$ y R = S.

b) Grafica los datos obtenidos en el siguiente plano cartesiano

c) ¿Cómo es la gráfica obtenida?

d) ¿Es $c_1<c_2$? ___ ¿Es $c_2<c_3$? ___ ¿Es $c_3<c_4$? ___ ¿Es $c_4<c_5$? ___ ¿Es $c_5<c_6$? ___ ¿Es $c_6<c_7$? ___ ¿Es $c_7<c_8$? ___ ¿Es $c_8<c_9$? ___

Cada valor de c_i está en función de t_i, esto se escribe matemáticamente $C = f(t)$, con $1 \leq i \leq 9$ en el caso particular que nos compete. En una función cuando $f(t_i) < f(t_{i+1})$ se dice que f es creciente en el intervalo [i, i+1]

e) ¿Es la gráfica creciente o decreciente?

f) Efectúa las siguientes operaciones:

1) $\dfrac{c_2 - c_1}{t_2 - t_1} =$

2) $\dfrac{c_3 - c_1}{t_3 - t_1} =$

3) $\dfrac{c_3 - c_2}{t_3 - t_2} =$

4) $\dfrac{c_4 - c_1}{t_4 - t_1} =$

5) $\dfrac{c_4 - c_2}{t_4 - t_2} =$

6) $\dfrac{c_4 - c_3}{t_4 - t_3} =$

7) $\dfrac{c_5 - c_1}{t_5 - t_1} =$

8) $\dfrac{c_5 - c_2}{t_5 - t_2} =$

9) $\dfrac{c_5 - c_3}{t_5 - t_3} =$

10) $\dfrac{c_5 - c_4}{t_5 - t_4} =$

11) $\dfrac{c_6 - c_1}{t_6 - t_1} =$

12) $\dfrac{c_6 - c_2}{t_6 - t_2} =$

13) $\dfrac{c_6 - c_3}{t_6 - t_3} =$

14) $\dfrac{c_6 - c_4}{t_6 - t_4} =$

15) $\dfrac{c_6 - c_5}{t_6 - t_5} =$

16) $\dfrac{c_7 - c_1}{t_7 - t_1} =$

17) $\dfrac{c_7 - c_2}{t_7 - t_2} =$

18) $\dfrac{c_7 - c_3}{t_7 - t_3} =$

19) $\dfrac{c_7 - c_4}{t_7 - t_4} =$

20) $\dfrac{c_7 - c_5}{t_7 - t_5} =$

21) $\dfrac{c_7 - c_6}{t_7 - t_6} =$

22) $\dfrac{c_{10} - c_7}{t_{10} - t_7} =$

g) ¿Qué conclusiones puedes obtener de los cálculos anteriores?

____

Ese número que has obtenido, se llama pendiente de una recta y suele denotarse con la letra m.

h) ¿Cuál de las siguientes opciones marcarías?

m>0 m=0 m<0

Cuando m>0 la gráfica de la función es creciente
Cuando m<0 la gráfica de la función es decreciente
Cuando m=0 la gráfica de la función es horizontal

i) ¿Cómo podrías calcular el tiempo que necesita tu lavamanos en llenarse?

____

j) ¿En qué tiempo se llena el lavamanos de tu casa?

Actividad Nº 6: ¿Cuál es el volumen de una gota de agua?

1) Para ello, utilizando el vernier hábilmente o una regla graduada, vas a medir el diámetro de 12 gotas $\{g_1, g_2, g_3, ..., g_{12}\}$ y los resultados de las observaciones los vas a tabular:

Gota	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
mm												

2) Suma los valores en mm de los diámetros obtenidos, es decir, las medidas asociadas a las gotas $g_1, g_2, ..., g_{12}$, en general si $g_1, g_2, ..., g_n$ es una sucesión finita de números reales, la propiedad asociativa generalizada de la suma, nos permite escribir la suma de estos números reales como: $g_1 + g_2 + ... + g_n$. Esta suma la podemos escribir en forma abreviada usando el símbolo de sumatoria: la letra griega sigma mayúscula:

$$\sum_{j=1}^{n} g_j = g_1 + g_2 + ... + g_n$$

que leeremos "suma de g_j desde $j = 1$ hasta n"

De la misma manera, la suma $g_3 + g_4 + ... + g_n$ la representaremos con el símbolo:

$$\sum_{j=3}^{n} g_j = g_3 + g_4 + ... + g_n$$

En general, si $k \leq j \leq n$, $\sum_{j=ki}^{n} g_j = g_k + g_{k+1} + ... + g_n$

Notemos que: si $g_0, g_1, g_2, ..., g_{n-1}, g_n$,es una sucesión finita de números reales, entonces:

- $\sum_{i=0}^{n} g_i = \sum_{j=0}^{n} g_j = \sum_{k=0}^{n} g_k = g_0 + g_1 + g_2 + ... + g_{n-1} + g_n$
- $\sum_{j=m}^{m} g_j = g_m \quad$ para $\quad 0 \leq m \leq n$
- $\sum_{i=0}^{n} g_i = \sum_{i=0}^{k} g_i + \sum_{i=k+1}^{n} g_i \quad$ para $\quad 0 \leq k < n$
- Si $g_i = c,$ para $0 \leq i \leq n,$ tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{n} g_i = \sum_{i=0}^{n} c = (n+1) \cdot c$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_i = \sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=k}^{n} g_i = \sum_{i=k}^{n} c = (n-k+1)\cdot c$$

El símbolo de sumatoria tiene las siguientes propiedades:

I. $\sum_{j=1}^{n}(g_j + t_j) = \sum_{j=1}^{n} g_j + \sum_{j=1}^{n} t_j$

II. $\sum_{j=1}^{n} c\cdot g_j = c\cdot\sum_{j=1}^{n} g_j$

III. $\sum_{j=m}^{n}(g_j - g_{j-1}) = g_n - g_{m-1}$

3) Demuestra estas tres propiedades:

I. $\sum_{j=1}^{n}(g_j + t_j) = \sum_{j=1}^{n} g_j + \sum_{j=1}^{n} t_j$

II. $\sum_{j=1}^{n} c\cdot g_j = c\cdot\sum_{j=1}^{n} g_j$

III. $\sum_{j=m}^{n}(g_j - g_{j-1}) = g_n - g_{m-1}$

4) Utilizando los resultados de la tabla del ejercicio 1 calcula:

$$\sum_{k=1}^{12} g_k =$$

5) La suma obtenida en el ejercicio anterior divídela entre el número de gotas

A este cociente se le denomina promedio o media aritmética y se denota:

$$\overline{g}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g_k=\frac{1}{n}\left(g_1+g_2+...+g_n\right)$$ y en nuestro caso particular como $n=12$

tenemos que $$\overline{g}=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{12}g_k=\frac{1}{12}\left(g_1+g_2+...+g_{12}\right)$$

La media aritmética es un valor muy importante en la estadística así como la varianza s^2 la cual se calcula mediante la fórmula: $s^2=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(g_i-\overline{g})^2$.

6) Supongamos que n fueron las gotas a las que le mediste el diámetro, es decir, tienes una sucesión de números reales $g_1,g_2,...,g_n$ Demuestra, utilizando las propiedades de la sumatoria del ejercicio 2:

a) $\sum_{i=1}^{n}(g_i-\overline{g})=0$

b) $s^2=(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}g_i{}^2)-(\overline{g})^2$

7) ¿Sabes cuánto vale el número π ? Sí ☐ No ☐

8) Con la ayuda de la cinta métrica o la cinta de costurera mide la longitud de la circunferencia de algunos objetos circulares, luego mide sus respectivos diámetros y por último calcula el cociente $\frac{Circunferencia}{Diámetro}$. Apunta los datos en la siguiente tabla:

Objeto Circular	Circunferencia	Diámetro	$\frac{Circunferencia}{Diámetro}$
Mesa			
Moneda			
Plato			
Tapa de olla			
Ula ula			
Mantel			
Pizza			

9) ¿Qué conclusiones puedes obtener?

____
____
____
____
____
____

Cuando uno obtiene ese cociente $\frac{Circunferencia}{Diámetro}$ independientemente de lo grande o pequeño que sea el objeto circular se obtiene una constante llamada π la cual es un número irracional que tiene un valor aproximado de 3,14159...

10) Supón que la gota es una esfera, procede a calcular, con la ayuda de la calculadora, el volumen de cada gota. Recuerda que el volumen de una esfera es $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$. Coloca los resultados en la siguiente tabla:

Gota	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}	G_{11}	G_{12}
mm^3												

11) Calcula $\overline{G}$. Recuerda que $\overline{G} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} G_j$

Expresa el resultado en:

a) mm^3

b) m^3 (Recuerda que con la notación científica todo número real puede escribirse como $a \cdot 10^n, con\ 0 < a < 10$)

c) ¿Cuántos litros tiene una gota?

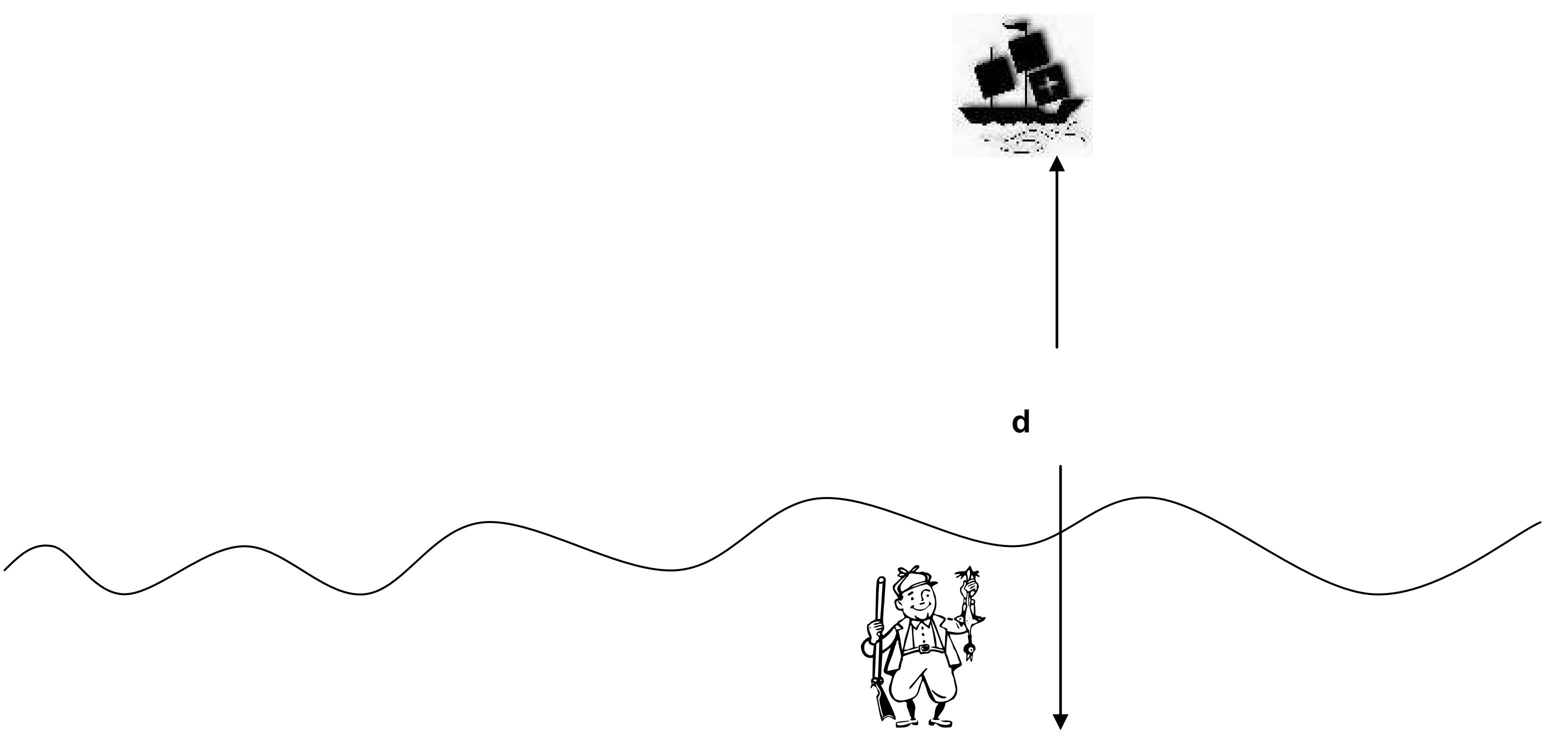
5.4.-Proyecto Nº 2: El peñero del pescador

La idea de este proyecto es aplicar el Teorema de Thales en un problema de la vida real.

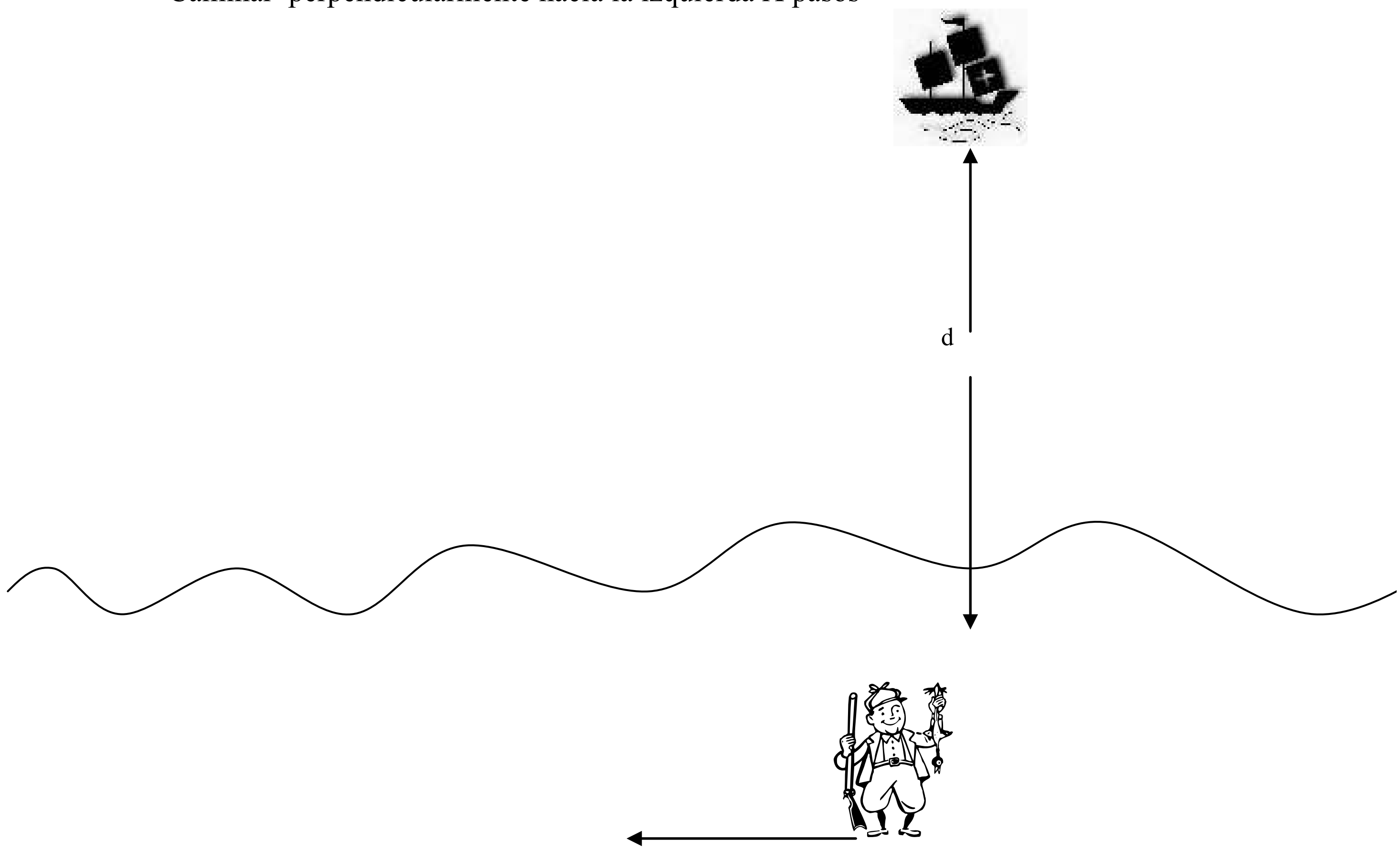
Debe ser para grupos de tres alumnas y/o alumnos, los cuales deberían calcular ciertas distancias sin la ayuda de cintas métricas. Para ello deben tomar un patrón de medida, bien sea una vara, un pedazo de palo o un paso promedio de alguno de las alumnas y/o los alumnos. Lo ideal sería trasladarse hasta una playa en la cual haya algún peñero, lancha o yate anclado. El tiempo para la culminación del mismo no debe exceder una semana.

Playa El agua, Margarita. Fuente: www.orinocodelta.com/images/i_playagua.jpg

¿A qué distancia se encuentra el pescador del peñero?

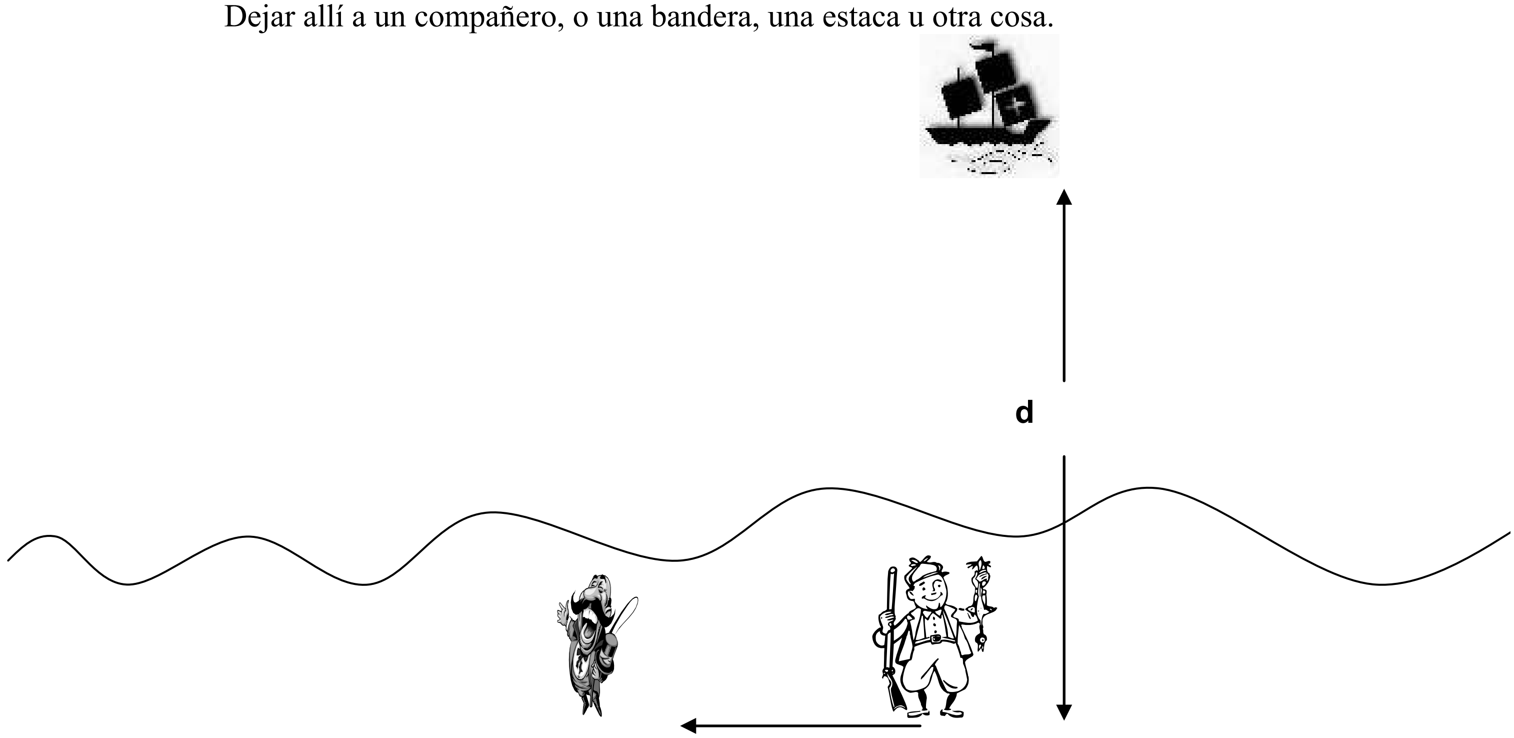


Como el pescador no tiene cinta métrica, él debe utilizar una medida, por ejemplo, el paso.
Caminar perpendicularmente hacia la izquierda X pasos



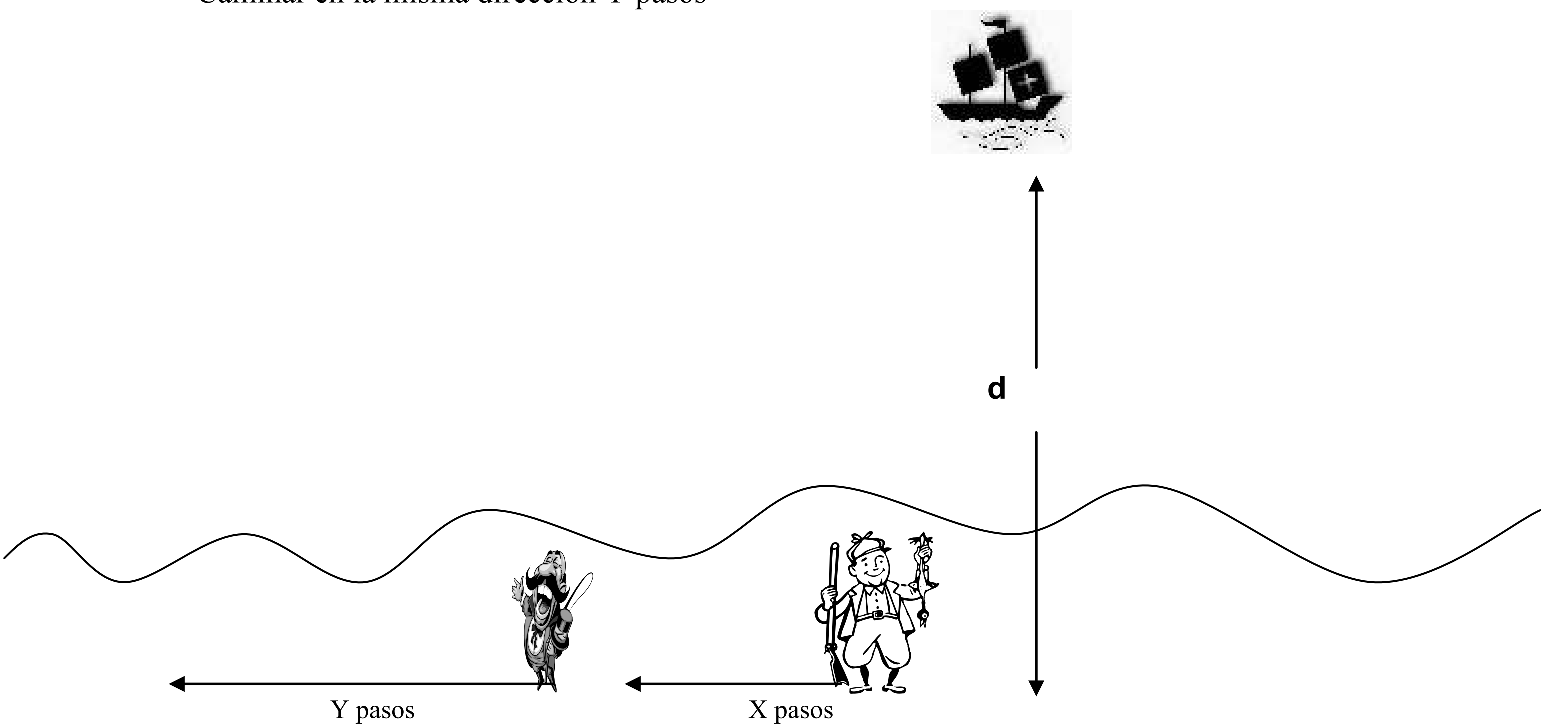
x pasos

Dejar allí a un compañero, o una bandera, una estaca u otra cosa.

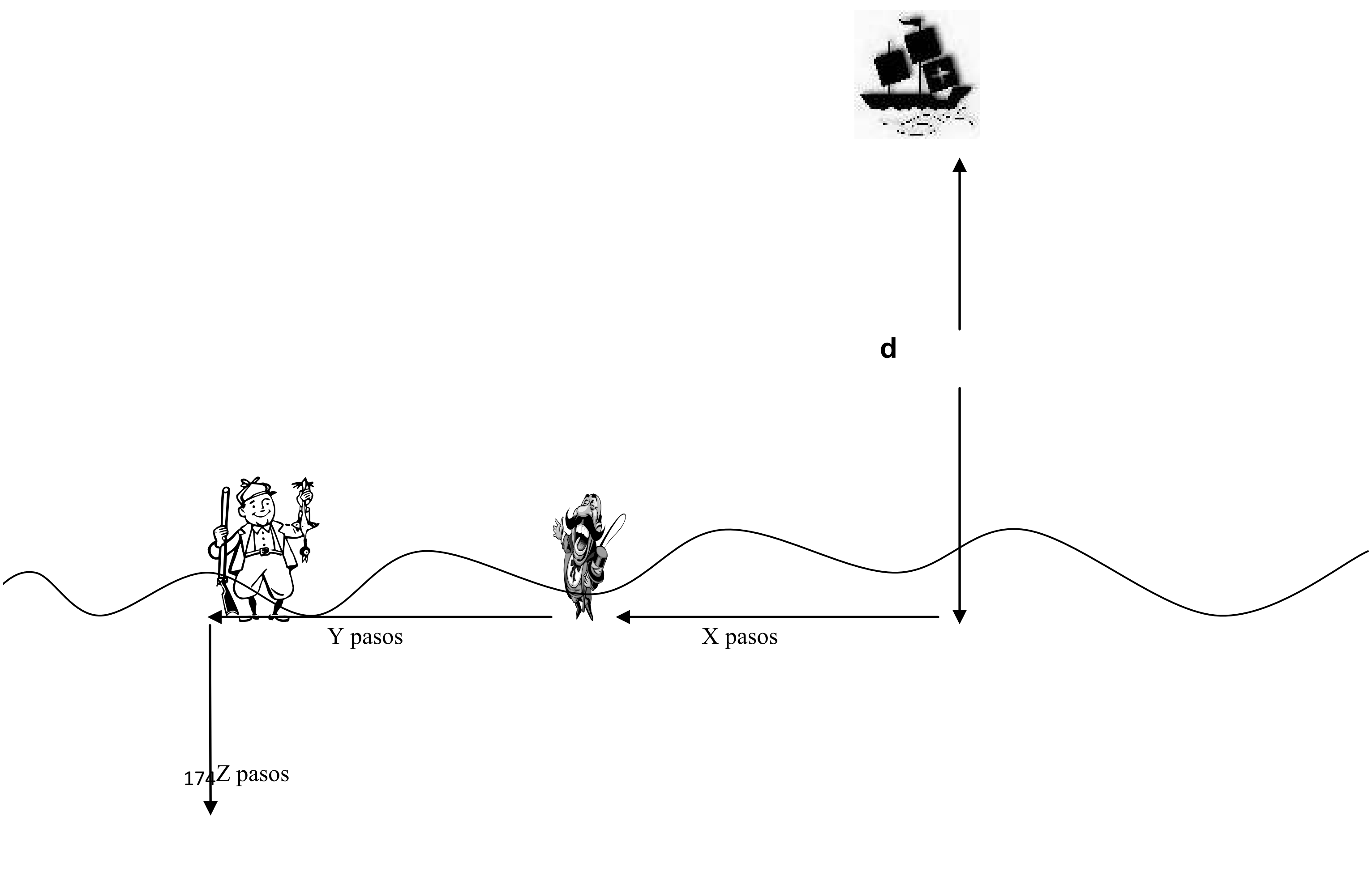


x pasos

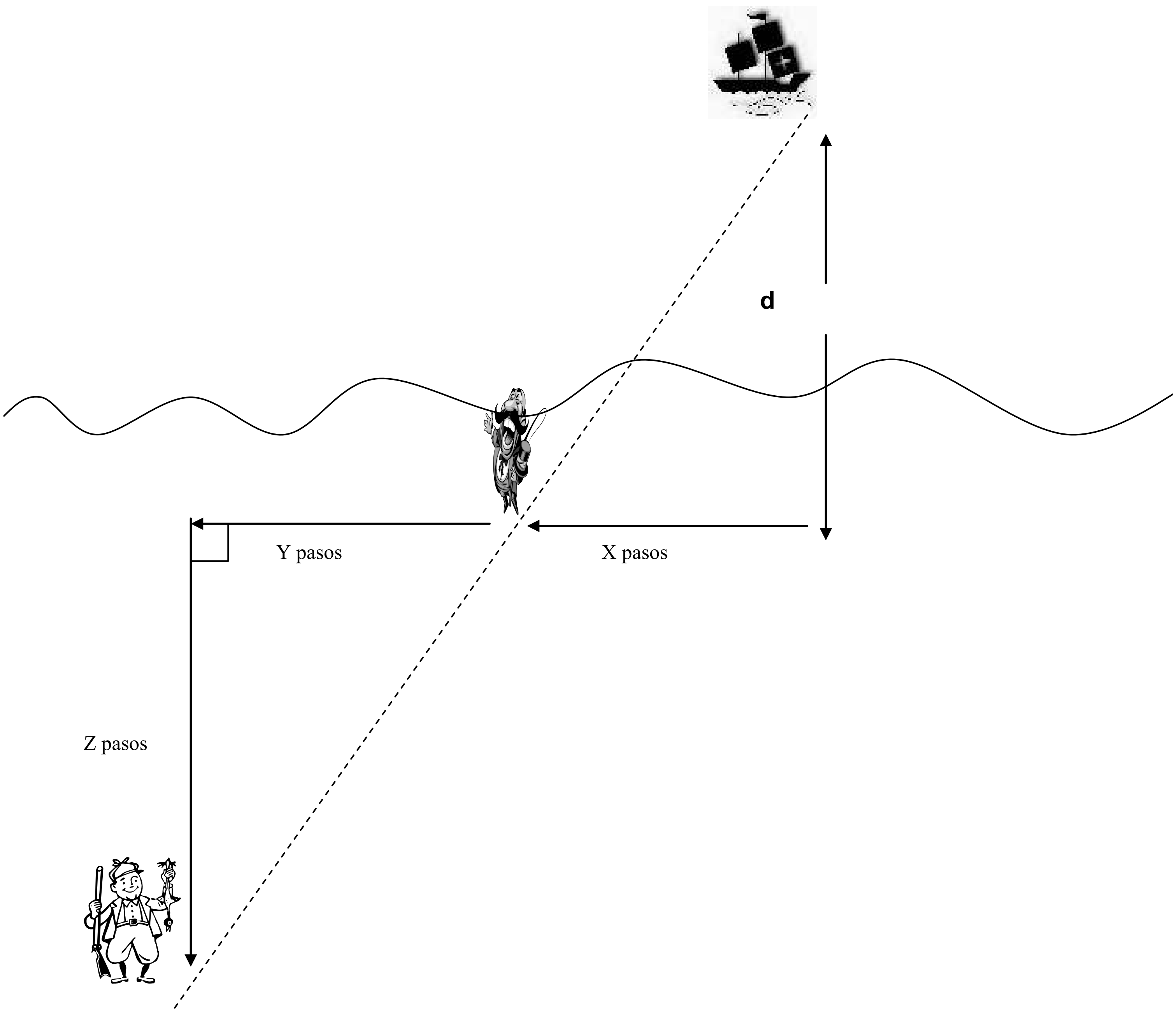
Caminar en la misma dirección Y pasos

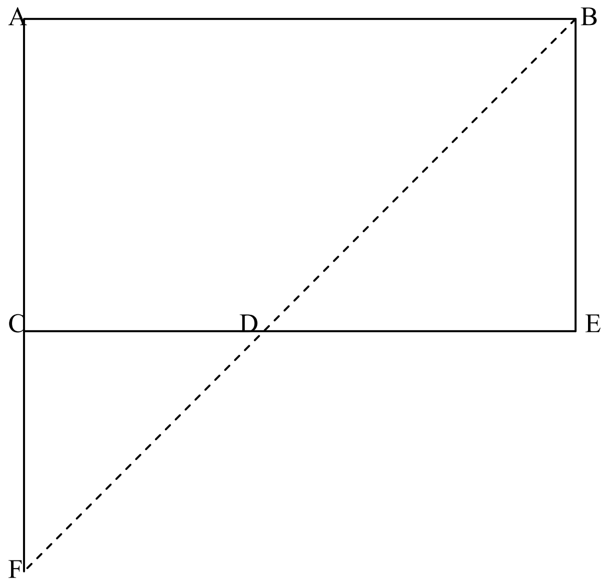


Caminar, de allí, hacia la izquierda, formando un ángulo de 90º, Z pasos hasta que...



…esté en un punto el cual esté alineado con el punto donde está el compañero y el punto donde está el peñero.





B es el punto donde se encuentra el peñero
E es el punto donde se encontraba inicialmente el pescador
D es el punto donde el pescador dejó al compañero
C es el punto donde el pescador cambio su curso 90º a la izquierda
F es el punto donde el pescador puede mirar al peñero sobre la misma línea (visual) donde se encuentra el compañero, la bandera o la estaca.

Tenemos los siguientes datos:

$$\overline{DE} = X \ pasos$$
$$\overline{CD} = Y \ pasos$$
$$\overline{CF} = Z \ pasos$$

Nuestra incógnita es $\overline{EB} = d = ?$
¿Cuánto mide $\overline{AB}$?

¿A qué otra medida es equivalente $\overline{AC}$?

¿Cómo son las rectas que contienen los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CE}$?

Demostrarles a los alumnos el Teorema de Thales y orientar a la alumna y al alumno para que puedan obtener d en función de los datos que conoce, es decir, X, Y y Z.

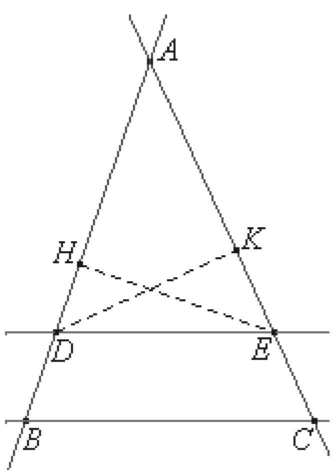
Teorema de Thales[1]

Estos son dos resultados que se conocen como Teorema de Thales de Mileto, 624-547 A.C.):

1. Cuando dos rectas paralelas cortan a dos rectas secantes, determinan en éstas segmentos proporcionales
2. El ángulo inscrito en un semicircunferencia es recto.

Cuando dos rectas paralelas cortan a dos rectas secantes, determinan en éstas segmentos proporcionales

En la figura siguiente las paralelas *BC* y *DE* cortan a las secantes *AB* y *AC*. Además se han trazado las alturas *DK* y *EH* del triángulo *ADE*. Representamos con (*XYZ*) el área del triángulo *XYZ*.



(*BDE*) = (*CED*) pues ambos triángulos tienen la misma base *DE* y la misma altura (distancia entre paralelas).

$$(ADE) = (1/2)\, AD\, HE = (1/2)\, AE\, DK$$

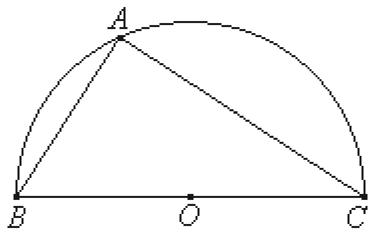
$$(BDE) = (1/2)\, BD\, HE; \quad (CED) = (1/2)\, CE\, DK$$

$$(ADE) : (BDE) = (ADE) : (CED)$$

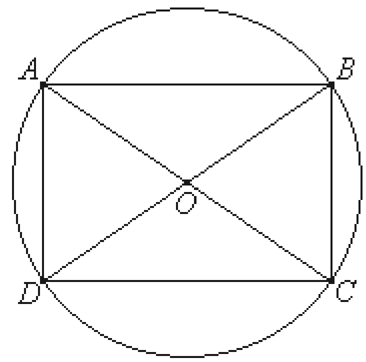
$$\boldsymbol{AD : BD = AE : CE}$$

El ángulo inscrito en una semicírcunferencia es recto.

[1] Tomado de la página web <http://www.ctv.es/USERS/pacoga/bella/htm/thales.htm>



El teorema de Thales dice que el ángulo A es recto, pues está inscrito en una semicircunferencia.

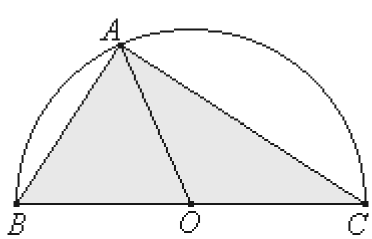


Thales pudiera haber usado esta figura para demostrar el teorema.

Sir Thomas L. Heath, en su libro *Greek Mathematics* aventura que Thales podía haber demostrado el teorema razonando de la siguiente manera sobre la figura del rectángulo *ABCD*:

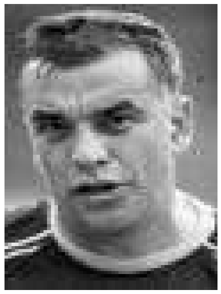
> Como en los triángulos *ADC*, *BCD*, los lados *AD*, *DC* son iguales a *BC*, *CD* respectivamente, y los ángulos comprendidos (ambos rectos) son iguales, los triángulos son iguales en todos los aspectos. Por tanto, el ángulo *ACD* (o sea, *OCD*) es igual al ángulo *BDC* (o sea, *ODC*). De aquí se deduce, por el recíproco de la proposición 5 del Libro I de los *Elementos* de Euclides, conocido por Thales, que *OC* = *OD*. De forma similar se podría demostrar que *OD*=*OA*. Por tanto, *OA*, *OD*, *OC* (y *OB*) son todos iguales, y una circunferencia con centor O y centro OA pasaría por B, C y D. Ahora, *AOC*, por ser una linea recta, es un diámetro de la circunferencia y *ADC* es una semicircunferencia. El ángulo *ADC* es un ángulo inscrito en una circunferencia y es recto por hipótesis.

A continuación se muestra la demostración que aparece en la Proposición 32 del Libro III de los *Elementos* de Euclides:



Como *OA* y *OB* son iguales, los ángulos *ABO* y *BOA* también son iguales y como *OA* y *OC* son iguales, los ángulos *OAC* y *OCA* son iguales. Por tanto, *BAC* es la suma de *ABC* y *ACB*. Teniendo en cuenta que la suma de los tres ángulos de un triángulo *BAC* debe ser recto.

Proyecto N° 3: La estrella de la vinotinto



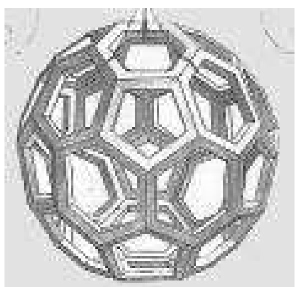
Richard Páez: Director Técnico de la "vinotinto"
Fuente:deportes.eluniversal.com/futbol/2000/Seleccion/indice.shtml

24 mil personas apoyando a la vinotinto en el Estadio Olímpico de la UCV **Fuente:** http://www.lavinotinto.com/mayor.html

Ronaldo. **Fuente:** us.i1.yimg.com/us.yimg.com/i/fifa/gen/wp/wp64gerbra_s.jpg

Estudiantes de Mérida F.C.
Fuente: www.estudiantesdemerida.com/

Si se le preguntara a varios jugadores de la vinotinto, entrenadores o simples aficionados al fútbol qué es lo fundamental para practicar este deporte, se obtendría una buena colección de respuestas: mucho entrenamiento, labor de equipo, compenetración con los compañeros, unas buenas instalaciones, un buen entrenador, buenos jugadores... Pocos de los encuestados acertarían con la respuesta correcta: un balón. Sin esa "esfera", foco de nuestras miradas y desvelos, el fútbol no existiría. Pero, a pesar de ser el objeto sobre el que gravita toda la actividad del futbolista en la cancha, no se le presta la atención que se merece. Si se le mira detenidamente con ojos matemáticos se notará que cuando está bien inflado, parece una esfera perfecta, el cuerpo ideal de los filósofos griegos, la creación de los dioses. Pero, ¿realmente es una esfera perfecta?



Fevernova: balón oficial del mundial de fútbol 2002
Fuente:www.collegesoccer.com/club_adidas/feature_story/241467.html

Su superficie está formada por unos polígonos regulares: pentágonos y hexágonos unidos entre sí. Si está un poco desinflado se puede mantener apoyado perfectamente en equilibrio sobre una de sus caras y deja de ser una esfera para convertirse en un poliedro. Un poliedro llamado icosaedro truncado formado por 12 pentágonos y 20 hexágonos. En total 32 caras. Para contar el número de aristas basta con multiplicar el número de hexágonos por 6, es decir, 120 aristas, más 12 pentágonos por cinco aristas cada uno es 60. En total 180 aristas. Pero como cada arista está compartida por dos polígonos se debe dividir por 2 y se obtiene 90 aristas en total. Ahora para contar el número de vértices se procede de la siguiente manera: cada arista tiene dos vértices, así que hay 90 por 2, 180 vértices, pero si en cada vértice confluyen tres aristas, cada uno se ha contado tres veces, así que hay 60 vértices (180 entre 3). Hay una fórmula que relaciona el número de caras, vértices y aristas.

caras + vértices = aristas + 2

En el caso particular del balón se verifica ya que 32 + 60 = 90 + 2.

Esta relación la demostró un matemático suizo, Leonard Euler, uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos. Prolífico en todos los sentidos, no sólo publicó más de 500 libros y artículos, a pesar de quedarse tuerto a los 28 años y ciego 17 años antes de morir, sino que además tuvo tiempo de tener trece hijos, lo que con toda seguridad constituye un record en el mundo de la Matemática.

El balón de fútbol es un poliedro el cual se obtiene al cortar los 12 vértices de un icosaedro - uno de los cinco poliedros regulares descubiertos ya por Platón hace más de 2.500 años, formado por 20 triángulos iguales -, de ahí su nombre. Los 12 pentágonos corresponden a los 12 cortes en los vértices del icosaedro y los 20 hexágonos son los restos de las caras del icosaedro.

¿Por qué se utiliza este poliedro para construir los balones?, Es el que más se aproxima a una esfera. Su volumen es sólo el 86,74 % de la esfera correspondiente, que no es una mala aproximación. Al curvar sus caras cuando se infla, este porcentaje aumenta ligeramente y sobrepasa el 95 %.

Pero hay otro poliedro de nombre casi impronunciable, el rombicosidodecaedro, para abreviar le llamaremos "rombico", que ocupa el 94,32 % de la esfera, ¡ y sin inflar!. El "rombico" está formado por 12 pentágonos, 30 cuadrados y 20 triángulos... 62

caras en total; casi el doble que el sencillo icosaedro truncado. Tiene "sólo" 120 aristas y, según Euler, 60 vértices.

Actividades para los alumnos

1) ¿Es un balón una esfera?
2) De ser una esfera, ¿cuál es el área de su superficie?
3) ¿Cuántos polígonos regulares tiene un balón de fútbol?
4) ¿Cuántos pentágonos tiene?
5) ¿Cuántos hexágonos tiene?
6) ¿Cuántas aristas tiene?
7) ¿Cuántos vértices tiene?
8) Calcula ahora el área del balón
9) Compara los resultados de 2 y 8

Información adicional del proyecto

Icosaedro truncado

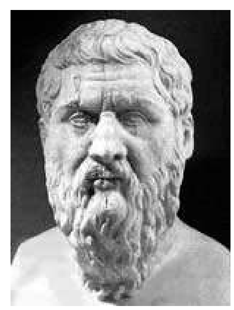
Es un sólido arquimediano que se produce al truncar un icosaedro. Está formado por 12 caras pentagonales y 20 hexagonales. Tiene 60 vértices y 90 aristas, siendo que en cada vértice concurren tres aristas. Comúnmente los balones de fútbol tiene esta forma, aunque también se identifican con los fullerano.

Fullerano

Es una estructura atómica que tiene 60 átomos de carbón (C60) descubierta en 1985. La molécula fue llamada formalmente "Buckminsterfullerano" por los trabajos de Busckminster Fuller sobre geodésicas y estructuras de domos. La molécula es de forma esférica y puede ser modelada con un icosaedro truncado o con un balón de fútbol. En general, las moléculas y las estructuras relacionadas son también llamadas "fulleranos".

Se pueden conseguir balones basándose en poliedros que se aproximan aún más a la esfera. Para ello hay que utilizar polígonos no regulares, es decir, con lados de distinta longitud. De hecho, algunos balones de fútbol se han construido de esta forma aunque también resultan más caros de fabricar. Si quieres ver como serían basta que te fijes en algunas de las bóvedas que se utilizan para cubrir los radiotelescopios, esas cúpulas que hay en algunos observatorios astronómicos. Parecen semiesferas perfectas, sin embargo, aunque un poco exóticos, son poliedros. En fin, a partir de ahora, cuando hagas una gambeta y veas volar el balón hacia la portería piensa que el viejo Platón, que identificaba al icosaedro con el agua, y el ciego Euler, que se entretuvo en contar tantas caras y vértices de tantos poliedros han hecho posible, en parte,que ese tanto suba al marcador.

Apolonio



Platón

Y si te parece ver entre el público a cuatro tipos raros, fantasmagóricos, vestidos con túnicas griegas aplaudiendo a rabiar tu gambeta, no te extrañes son Menecmo, Apolonio, Aristeo y Euclides los padres de esas curvas tan populares llamadas cónicas. Te aplauden, por que sin pretenderlo has dibujado en el aire una de las cónicas que les hicieron inmortales: una parábola.

Pero esa es otra historia...

Más sobre los poliedros

Los poliedros son **sólidos cuyas caras son polígonos regulares**.

En los poliedros distinguimos:

- **Vértices**: puntos donde concurren tres aristas
- **Aristas**: lados de los polígonos regulares
- **Caras**: polígonos regulares

Además podemos fijarnos en:

- **Ángulos planos**: cuyos lados son dos aristas convergentes
- **Ángulos diédricos**: cuyas caras son dos polígonos adyacentes
- **Ángulos triédricos**: formados por tres caras convergentes en un vértice

En un vértice pueden concurrir *m* polígonos regulares de *n* lados unidos vértice a vértice. La suma de los ángulos de cada uno de estos polígonos no debe ser mayor de 360º, pues de lo contrario no formarían un "ángulo sólido".

Por tanto debe considerarse que: $\frac{m(n-2)180^\circ}{n} < 360^\circ$

Los más sencillos son aquellos que se forman a partir de un solo polígono regular. Este grupo de poliedros ya era conocido por Euclides (330 A.C.) y estos cinco sólidos estuvieron acompañados de cierto misticismo. Se asociaban con los cuatro elementos supuestos y con el Universo y reciben el nombre de **sólidos platónicos**. Los únicos poliedros regulares son:

1. El TETRAEDRO: Formado por tres triángulos equiláteros. Es el que tiene menor volumen de los cinco en comparación con su superficie. Representa el fuego. Está formado por 4 caras, 6 aristas y 4 vértices
2. El CUBO: Formado por seis cuadrados. Permanece estable sobre su base. Por eso representa la tierra. Está formado por 6 caras, 12 aristas y 8 vértices.
3. El OCTAEDRO: Formado por ocho triángulos equiláteros. Gira libremente cuando se sujeta por vértices opuestos. Por ello, representa al aire en movimiento. Está formado por 8 caras, 12 aristas y 6 vértices.
4. El DODECAEDRO: Formado por doce pentágonos regulares. Corresponde al Universo, pues sus doce caras pueden albergar los doce signos del Zodiaco. Tiene 12 caras, 30 aristas y 20 vértices.

5. El ICOSAEDRO: Formado por veinte triángulos equiláteros. Es el tiene mayor volumen en relación con su superficie y representa al agua. Tiene 20 caras, 30 aristas y 12 vértices.

En todos ellos se cumple la relación: **CARAS + VÉRTICES – ARISTAS = 2**

También pueden construirse poliedros con más de un tipo de polígono regular. Reciben el nombre de **sólidos arquimedianos.** Existe un número infinito de ellos, pues incluye a dos grupos:

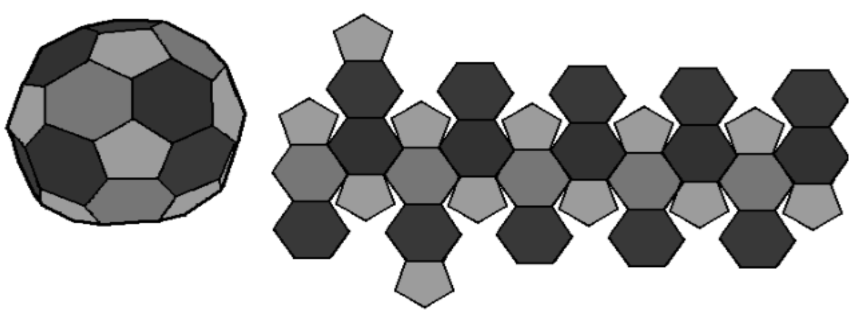
- Los PRISMAS REGULARES, cuyas caras laterales son cuadrados y sus bases, iguales y paralelas, son dos polígonos regulares.
- Los llamados ANTIPRISMAS, cuyas caras laterales son triángulos equiláteros y sus bases, también dos polígonos regulares paralelos, pero están girados, de forma que cada vértice de una se proyecta al punto medio de cada lado de la otra.
- Los POLIEDROS ESTRELLADOS. Johann Kepler (quien vivió entre1571 y 1630) estudió los poliedros estrellados, obtenidos a partir del pentagrama de los pitagóricos. La diferencia principal de estos poliedros estrellados con el resto es que son cóncavos. Hay cuatro, dos de puntas estrelladas con pirámides pentagonales y otros dos de puntas estrelladas con pirámides triangulares. Kepler los llamó gran y pequeño dodecaedro estrellado (de 12 puntas) y gran y pequeño icosaedro estrellado (de 20 puntas).

- El resto son trece sólidos diferentes:

    - El TETRAEDRO TRUNCADO: 4 hexágonos regulares y 3 triángulos equiláteros
    - El CUBO TRUNCADO: 6 octógonos regulares y 8 triángulos equiláteros
    - El CUBOCTAEDRO: 6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros
    - El ROMBICUBOCTAEDRO MENOR: 18 cuadrados y 8 triángulos equiláteros

- El OCTAEDRO TRUNCADO: 8 hexágonos regulares y 6 cuadrados
- El CUBO REDONDEADO: 6 cuadrado y 32 triángulos equiláteros
- El ROMBICUBOCTAEDRO MAYOR: 4 octógonos regulares, 10 hexágonos regulares y 12 cuadrados
- El ICOSIDODECAEDRO: 12 pentágonos regulares y 20 triángulos equiláteros
- El DODECAEDRO TRUNCADO: 12 decágonos regulares y 20 triángulos equiláteros
- El ICOSAEDRO TRUNCADO: 20 hexágonos regulares y 12 pentágonos regulares
- El ROMBICOSIDODECAEDRO MENOR: 12 pentágonos regulares, 30 cuadrado y 20 triángulos equiláteros
- El DODECAEDRO REDONDEADO: 12 pentágonos regulares y 80 triángulos
- El ROMBICOSIDODECAEDRO MAYOR: 12 decágonos regulares, 20 hexágonos regulares y 30 cuadrados

Icosaedro truncado



5.5.- Proyecto Nº 4: Algunos Códigos

Este proyecto tiene la finalidad de ahondar en la importancia de la divisibilidad y los sistemas de numeración. Ideal para alumnos del segundo año del Ciclo Diversificado. Puede hacerse con grupos de tres alumnos y el material que se necesita para ello es:

- Etiquetas de productos cualesquiera, en los que haya códigos de barra.
- Libros diversos en los que se lea el ISBN
- Una calculadora

La duración debe ser de una semana.

Introducción

Muchos alumnos han enviado en algún momento mensajes secretos o clandestinos usando códigos. La idea no tiene nada de trivial (el propio lenguaje es un código). Los códigos contienen numerosas facetas que podrían constituir la base de un proyecto.

1.- Mensajes secretos

Un sencillo método de codificación consiste en reemplazar cada letra por la siguiente:
Es decir A B C D E F G H I J K L M N Ñ O P Q R S T U V W X Y Z por
B C D E F G H I J K L M N Ñ O P Q R S T U V W X Y Z A.

¿Ft nvz qsbdujdp, wfsebe?

2.- Códigos más utilizados

a) **El código Morse:** fue inventado para enviar por medios eléctricos mensajes escritos.
b) **El Alfabeto Braille:** es un código que permite a los ciegos leer palabras al tacto.
c) **La taquigrafía:** es un código utilizado para poder escribir a la misma velocidad con que se habla.

d) **Números del ISBN:** los libros se codifican mediante los números del Internacional Standard Book Number. Por ejemplo, el ISBN de la edición inglesa del libro 101 proyectos matemáticos es 0 521 34759 9. El primer dígito representa el grupo lingüístico; las tres cifras siguientes son la identificación de la editorial (Cambridge University Press) y los cinco siguientes son los asignados por la editorial a este libro concreto. La última cifra es de verificación, y está elegida de modo que:

$$0\times10+5\times9+2\times8+1\times7+3\times6+4\times6+7\times4+5\times3+9\times2+9\times1=176$$

sea igual a 0 módulo 11, es decir, que el resto de dividir 176 entre 11 sea cero. Las librerías utilizan el ISBN para encargar libros. Si se comete un error al transmitir el número, será detectado (casi siempre) en una verificación efectuada en una computadora, pues el cálculo anterior no daría 0 módulo 11.

e) **El código de barras:** los libros y muchos otros artículos de venta en el comercio, llevan un código de barras y un número de artículo. En la caja registradora, el código de barras es examinado mediante un haz de láser; el lector de barras envía un mensaje a un ordenador, donde figuran los precios de todos los artículos. El ordenador envía los mensajes oportunos a la pantalla de la registradora y hace imprimir el recibo. Los números del código de artículo están formados como sigue:

75	**91143**	**02306**	**1**
Código del país	**Referencia del fabricante**	**Número de producto**	**Dígito de control**

El dígito de control se determina como sigue: Hállese la suma X de los 6 dígitos que ocupan puestos impares (contando desde la izquierda) y la suma Y de los 6 dígitos de posición par.

El dígito de control es tal que X-Y + dígito de control =0 mod 10 (0 módulo 10).

Recogiendo los códigos de los envases, artículos, etc., se podrán deducir los códigos correspondientes a productos de distintos países y fabricantes. Descifrar las reglas de formación de las barras constituye un problema interesante.

Capítulo 6: Conclusiones y Recomendaciones

6.1.- Conclusiones

La cuestión clave de la enseñanza de la Matemática no es si deben enseñarse los fundamentos sino cuáles fundamentos enseñar y cómo enseñarlos. Los cambios en la praxis de la Matemática alteran el equilibrio de las prioridades entre los diversos temas que son importantes para la numeralia, es decir, el dominio de los números. Los cambios en la sociedad, en la tecnología, en las escuelas, entre otros tendrán un efecto significativo en lo que será posible hacer en la matemática escolar del presente siglo. Todos estos cambios afectarán los fundamentos de la matemática escolar.

La finalidad con la cual se ha hecho el estudio en dos niveles diferentes es la de determinar de alguna manera si la formación general básica en Matemática le permite a la población escolarizada atacar, resolver o entender problemas que requieren un conocimiento matemático básico pero que están directamente relacionados con el mundo cotidiano.

La aplicación de la prueba de desarrollo a 170 estudiantes de octavo grado pretendía ver si los conocimientos adquiridos hasta ese nivel permiten la solución de problemas reales, ver la aptitud hacia la Matemática con la vida cotidiana o con la realidad, determinar hasta qué punto las y los estudiantes de octavo grado han estado vinculados con problemas de esa naturaleza. Se concluye que lamentablemente cerca del 100% reprobó la prueba.

Igualmente el análisis desarrollado a la muestra de 15 estudiantes iniciándose en el nivel superior muestran características similares en cuanto a errores, formas de atacar los problemas, que la de octavo grado.

Este análisis expone claramente que hay varios factores que podrían estar influyendo en el aprendizaje de la Matemática, lo cual requiere por supuesto un proceso de investigación de mayor envergadura. Entre las conclusiones a las cuales nos lleva nuestra investigación podríamos destacar:

- La población escolarizada no ha adquirido una formación elemental básica en Matemática que le permita resolver problemas cotidianos como los que conforman la prueba.

- En el proceso de enseñanza aprendizaje, según el análisis, se observó que no hay transferencia entre los contenidos matemáticos tradicionales y su aplicabilidad en la realidad.

- Se observa una actitud altamente negativa hacia la Matemática como herramienta para resolver problemas de la cotidianidad.

- Los problemas de los textos analizados están ajenos al entorno de la alumna y del alumno y por consiguiente, resultan poco interesantes. En ellos abundan precios desactualizados, artículos poco llamativos, situaciones rebuscadas, etc.

6.2.- Recomendaciones

Para elaborar planes de estudio de Matemática nuevos y eficaces debe intentarse prever las necesidades matemáticas de las y los estudiantes del mañana. Es por ello que proponemos la incorporación del sexto año como culminación de los estudios pre-universitarios con el propósito de aumentar la formación matemática de los bachilleres. Es la práctica presente y futura de la Matemática en el trabajo, en la ciencia, en la investigación la que deberá conformar la Educación Matemática razón por la cual proponemos, además, la creación de laboratorios matemáticos para grupos reducidos para tratar de evitar "que la Matemática y la vida cotidiana sean como las rectas paralelas que no se encuentran nunca" (Corbalán,1997).

A fin de elaborar planes de estudio de una Matemática eficaz, interesante, activa, participativa, vinculada con la realidad, debe atenderse a los patrones en la

Matemática de hoy para proyectar, lo mejor que podamos, ¿qué es en realidad fundamental? y ¿qué no lo es?, sobre este aspecto Steen (2001) comenta que en la Matemática de las escuelas tradicionales se recoge un número muy reducido de hilos conductores (por ejemplo, aritmética, geometría, álgebra) que se organizan en una disposición horizontal para formar el plan de estudios: primero aritmética, luego álgebra elemental, luego geometría, luego más álgebra y por último, como si fuera la culminación del saber matemático, el cálculo diferencial e integral; ingredientes éstos esenciales pero "sin embargo un punto de vista tentador que ninguno de ellos es el corazón de la disciplina, que la razón principal de existir del matemático es resolver problemas, y que, por lo tanto, de lo que realmente consiste la Matemática es de problemas y soluciones" (Halmos, 1980). Este enfoque estratificado de la Educación Matemática en realidad impide el desarrollo informal de la intuición a lo largo de las múltiples raíces de la Matemática. Además, refuerza la tendencia a diseñar cada curso para satisfacer ante todo los prerrequisitos del siguiente, haciendo que el estudio de la Matemática sea en gran medida un ejercicio de satisfacción postergada.

La matemática escolar suele verse como una tubería para los recursos humanos que fluyen desde las experiencias de la infancia hasta las carreras científicas. Los niveles de los planes de estudio de Matemática corresponden a secciones de tubos cada vez más angostos a través de los cuales deben pasar todas las y todos los estudiantes si quieren avanzar en su educación matemática y científica. Cualquier impedimento para aprender, los cuales son abundantes, restringe el flujo en la tubería completa. Como el colesterol en la sangre la Matemática puede obstruir las arterias educativas de una nación. También es urgente la introducción de los medios de comunicación en clase, empezando, quizá, por la prensa como una forma más próxima al quehacer escolar. Y algunos aspectos de ésta destaca Corbalán, (1998) el papel de los números (y de la matemática en general) en los periódicos; los errores matemáticos (como una forma de desmitificar la prensa y de hacer una lectura crítica de ella); los aspectos matemáticos asociados a los deportes (interés común y ascendente de los escolares de ambos sexos), sobre todo las clasificaciones; el estudio de las gráficas (en las que abundan los errores y es una forma de dominar la técnica de trazado) o los frecuentes datos estadísticos de la prensa.

Se suele aceptar que la Matemática sirve para hacer un análisis de la prensa y los juegos, pero empezando por los conocimientos matemáticos. No estaría de más dar un paso más y hacerlo (alguna vez al menos) al revés: empezar en ellos y llegar después a la Matemática.

En contraste, si los planes de estudio de Matemática incluyeran diversos hilos conductores paralelos, cada uno apoyado en las experiencias infantiles adecuadas, el flujo de recursos humanos se asemejaría más al movimiento de nutrientes en las raíces de un robusto árbol, o al caudaloso flujo de agua de una vasta vertiente, que a las paredes cada vez más estrechas de una arteria o tubo que se cierra. Diferentes aspectos de la experiencia matemática atraerán a niños con diferentes intereses y talentos, los cuales se nutrirán con ideas desafiantes que estimulan la imaginación y fomentan la exploración. El efecto colectivo será crear entre las y los estudiantes una comprensión profunda y diversificada de varias raíces diferentes de la Matemática.

La necesidad de mejorar la calidad de la educación y de lograr la excelencia educativa, continúa siendo objeto de preocupación, de allí que el principal reto del sistema educativo está en orientar sus transformaciones, enfatizando la difusión de estrategias didácticas como herramientas básicas en el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza. En este sentido es conveniente expresar lo que asevera el Currículo Básico Nacional (1997): “Es imprescindible señalar la importancia que tiene la comprensión en el área de Matemática, en general y resolución de situaciones problemas” (20).

Apéndice Documental 1

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemática

Av. Los Ilustres, Los Chaguaramos , A. P.: 20513, Caracas 1020A Venezuela
e-mail: depmat@euler.ciens.ucv.ve ***/ URL:*** http://euler.ciens.ucv.ve

CÁTEDRA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA, CARACAS
Prof. Dr. Castor David Mora
(Coordinador del Convenio Cooperativo de Formación Docente en matemática)

Convenio Cooperativo de Formación Docente (CCFD) en Matemática y Ciencias Naturales entre la Facultad de Ciencias y la Facultad de Humanidades y Educación

Teléfonos: 0058-2-6051442 / 1512
Secretaría: 0058-2-6051199
Fax-Nr.: 0058-2-6051197
Email: dmora@euler.ciens.ucv.ve
mora_david@magicvillage.de

Caracas, 16 de Junio de 2000

Estimado Profesor:

Mediante la presente me dirijo a usted, muy cordialmente, con la finalidad de solicitarle su colaboración para que el bachiller Argenis Arnaldo Algara Algara, Cédula de Identidad: V-6.361.904, pueda culminar satisfactoriamente su Trabajo Especial de Grado para optar al título de licenciado en Educación mención Matemática. El trabajo trata de una investigación, usando predominantemente técnicas y métodos cualitativos, sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la tercera etapa de la Escuela Básica, el cual forma parte de un proyecto amplio con la finalidad de impulsar la educación matemática en Venezuela.

Entre las actividades de investigación que estamos ejecutando, necesitamos ver el interés y las inquietudes que tiene los alumnos y los docentes de matemática en cuanto a la enseñanza de estas asignaturas en el nivel antes mencionado. En vista de que necesitamos recoger información sobre la realidad de la enseñanza de esta materia tan importante, requerimos de usted que por favor le permita al bachiller Algara la mayor colaboración posible, ya que sus actividades y los resultados de la investigación redundarán positivamente en aumentar el gusto y el cultivo de la matemática y en especial de los temas tratados en el 8° grado de la E. B. en todas las instituciones escolares de nuestro país.

De antemano le doy las gracias por su valiosa colaboración

Queda de usted, muy atentamente:

Dr. Castor David Mora
Coordinador del Convenio Cooperativo de
Formación Docente en Matemática
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela

Apéndice Documental 2

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Facultad de Humanidades y Educación
Escuela de Educación
Convenio Cooperativo de
Formación Docente

PRUEBA DIAGNÓSTICA SOBRE MATEMÁTICA DE 8º GRADO DE LA ESCUELA BÁSICA

Datos del Alumno:

Nombre del alumno__________________________Institución_________________________

Sección____________Edad___________Sexo_____________Fecha_____________

Instrucciones:

El motivo de las preguntas que aparecen en el siguiente instrumento es recoger información con la finalidad de investigar sobre el aprovechamiento matemático de los alumnos de octavo grado y así proponer cambios importantes para la enseñanza de la matemática en la Escuela Básica.

Estos conocimientos se observarán a través de un conjunto de siete "problemas" diversos, los cuales deberán ser desarrollados utilizando cualquier conocimiento matemático que consideres apropiado para darle solución a los mismos.

Los "problemas" que te planteo son para que los resuelvas sin importar mucho la formalidad con que los hagas; lo que en realidad importa es la destreza y razonamiento que tú demuestres para resolver cada planteamiento. Es importante que realices el mayor esfuerzo posible en la solución de cada problema y te pedimos que por favor escribas todos los cálculos y procedimientos en tu hoja de trabajo, ya que esa información será muy valiosa para el propósito de nuestro estudio.

Es recomendable que antes de comenzar a responder, le des una lectura completa a cada uno de los problemas y después de haberlos entendido comiences por el que consideres más fácil.

Para la realización de la prueba tendrás un lapso de 2 horas.
Gracias por tu colaboración.

Argenis Arnaldo Algara Algara

1.- Tu papá hará la reparación del techo de la sala de la casa, el cual es plano como se muestra en la **figura 1**. La reparación tendrá un costo por metro cuadrado (m^2) de 25.000 bolívares cada uno. Si él te pide determinar el costo total según las medidas indicadas en la figura 1 ¿qué respuesta correcta le podrías dar?

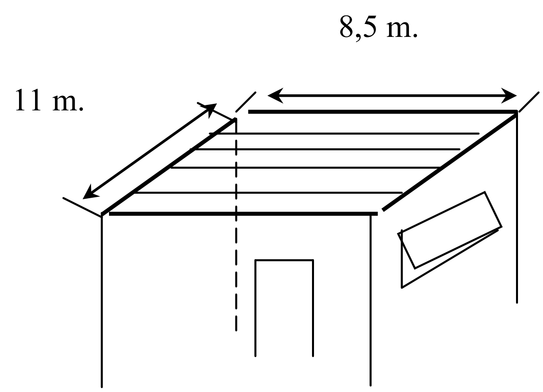


Fig. 1

2.- Una familia venezolana constituida por 2 adultos y cuatro niños necesitan 640.000 bolívares mensuales como cesta básica para el mes de Mayo de 2000. Ambos adultos tienen que trabajar para poder completar esa cantidad.

a) ¿El gasto de la familia en útiles escolares, alimentación, calzado, transporte, vestido y vivienda representa $\frac{3}{4}$ partes del ingreso total, ¿cuánto dinero dispone la familia para los demás gastos?
b) El sueldo mínimo actual es de 144.000 bolívares, ¿cuántos sueldos mínimos aproximadamente representa la cesta básica?
c) Los niños no van a colegios privados porque el colegio más cercano cobra por cada niño Bs. 40.000 mensuales, ¿qué parte de la cesta básica necesitaría esta familia para pagar un colegio privado en Venezuela?

Fuente: www.spbancarios.com.br/saude/cesta.htm

3.- Los alumnos de octavo grado de dos escuelas de la parroquia Antímano son invitados a una exposición en el Museo de Ciencias Naturales. En las listas aparece un total de 950 alumnos. En la estación del metro de Antímano una profesora observa que hay 28 hembras más que varones, ¿cuántas alumnas y alumnos van al museo?

Foto: Marco Antonio Barrios

4.- Una familia de Antímano, donde llega el agua con poca frecuencia, tiene en la azotea de su casa tres recipientes (tanques) para almacenar el preciado líquido. En la **figura 2** se muestran las medidas de los tres tanques.

a) ¿Cuánto volumen tiene cada tanque?

b) Cuando falta el agua, los camiones cisternas se encargan de llenar en algunos lugares los tanques a un costo de **15.000 bolívares por cada 3.000 litros** de agua, ¿cuánto tiene que pagar la familia para poder llenar los tres tanques?, ¿cuánto cuesta cada litro de agua?

c) El tercer tanque presenta problemas y para sustituirlo la familia adquiere tres pipotes de igual tamaño con las medidas como se indica en la **figura 3**, ¿son suficientes para almacenar la cantidad de agua del tercer tanque?

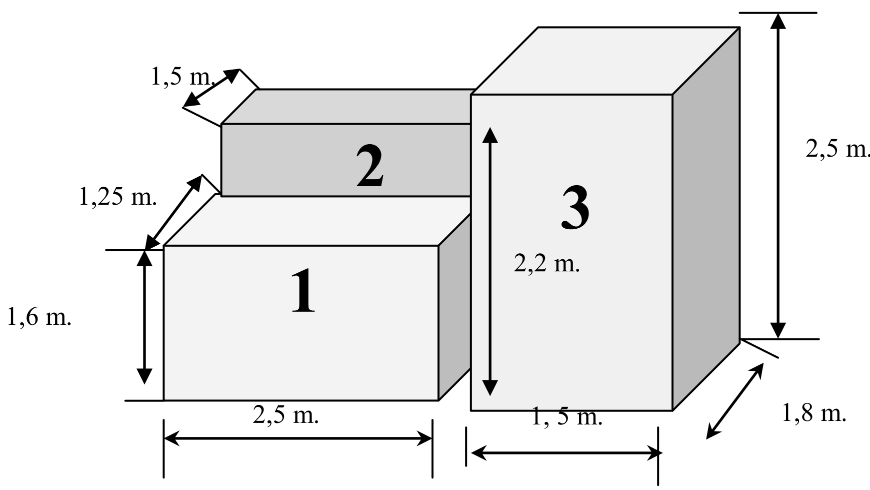


Fig. 2

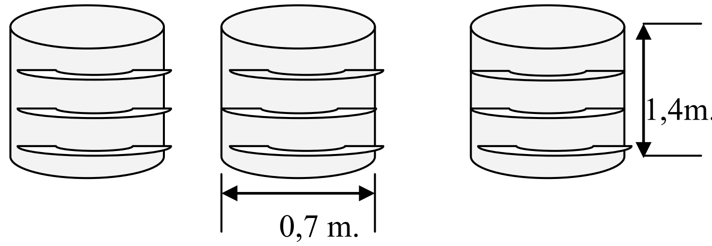


Fig. 3

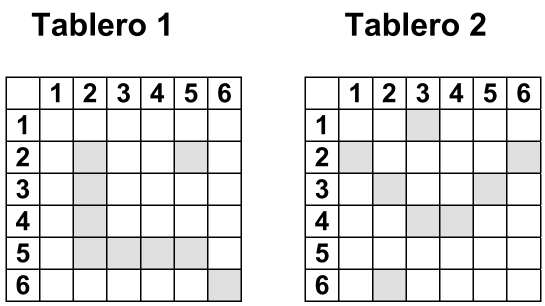


Fig. 4

5.- En una fiesta en el Parque del Este en Caracas se ofrece un juego con dados ciegos y dos tableros como se observa en la **figura 4**. Cada jugador lanza un dado dos veces, primero sobre el tablero 1 y después sobre el 2. El jugador obtiene un regalo cuando el dado cae sobre una de las casillas oscuras. ¿En cuál de los dos tableros es mayor la oportunidad de ganar? ¿Por qué?

6.- El gobierno decide ayudar a las familias sin vivienda con la compra de una parcela en el interior del país. Las dimensiones de algunas parcelas son similares a las de **figura 5**. Una de las personas que recibió su parcela decide cercarla para lo cual desea colocar en cada esquina una columna (horcón) de madera. Además, la persona quiere que todas las columnas tengan la misma separación y que esta última sea lo más grande posible.

a) ¿Cuántas columnas necesita el nuevo dueño de la parcela?

b) ¿Cuánto dinero gasta en total sabiendo que cada m^2 de cerca metálica cuesta Bs. 45.000 y cada columna Bs. 27.000?

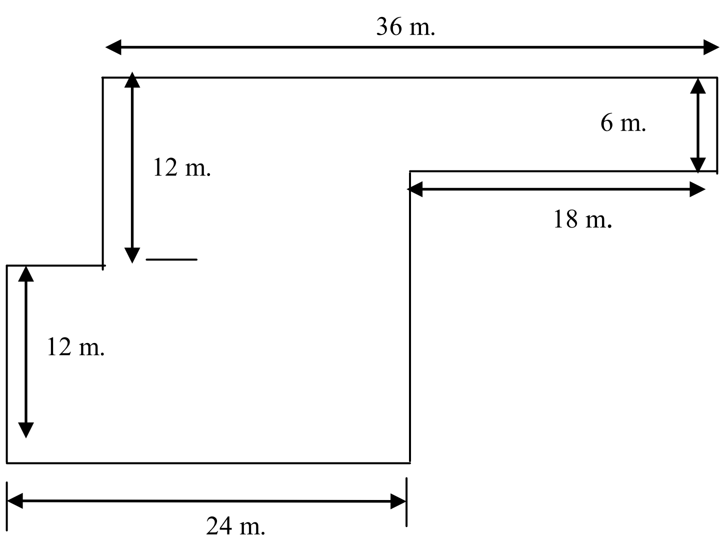


Fig. 5

7.- A raíz de la catástrofe natural que ocurrió el 16 de Diciembre de 1999, quedaron destruidas muchas viviendas. Se dice que una familia de clase media alta tenía un seguro de vivienda por Bs. 60.000.000. El seguro decide pagar solamente $\frac{2}{5}$ partes de esa cantidad por los daños causados. ¿Cuánto recibiría la familia por la perdida de su vivienda? ¿Esa cantidad representa el 40% del monto asegurado?

8.- En la **figura 6** se representa una pirámide de la composición de la población venezolana por edad y sexo según el censo de 1991 (los valores de la última fila deben multiplicarse por 1.000 para obtener los resultados en millones). Responde las siguientes interrogantes:

a) ¿Cuántas personas aproximadamente habían en Venezuela con una edad comprendida entre 15 y 19 años?
b) ¿Cuál de los grupos a partir de 70 años es mayor ?
c) ¿Se puede decir que hay más varones que hembras entre 45 y 49 años? Explica.
d) ¿Según la gráfica, quiénes tienen mayor posibilidad de tener una vida más larga?
e) ¿Para cuál edad existía mayor cantidad de personas?

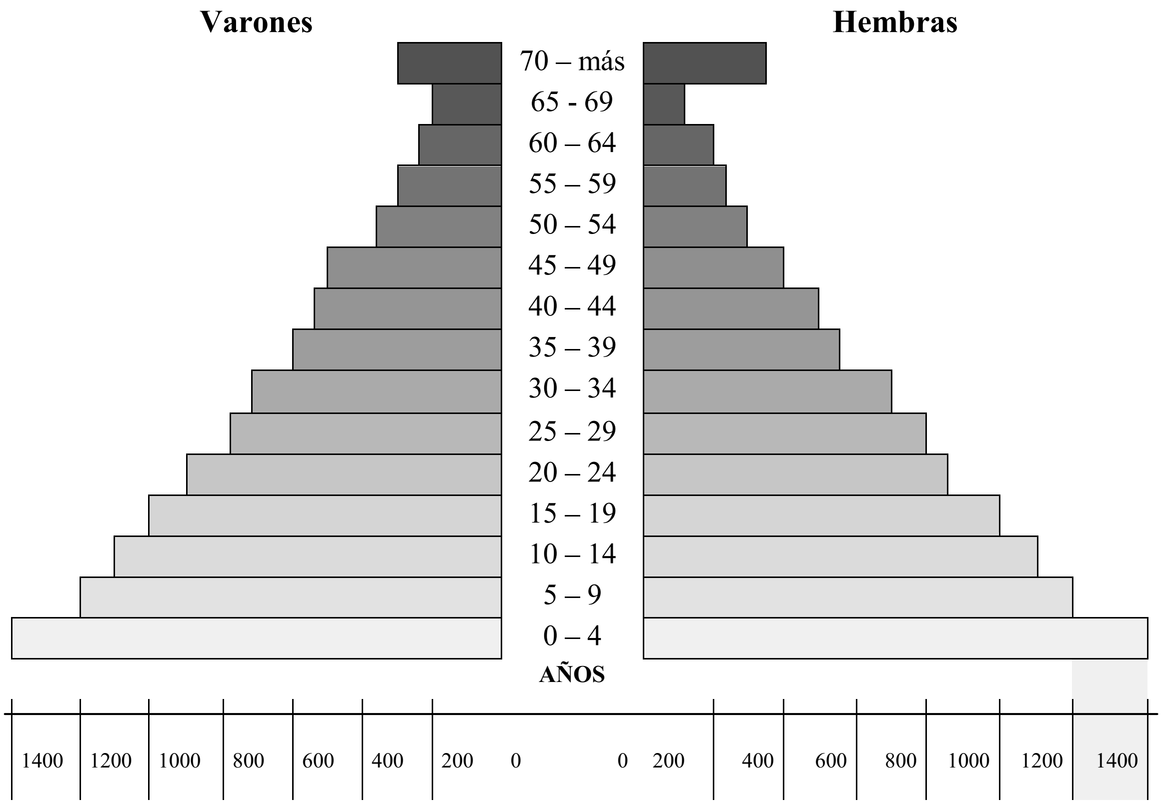

Varones
Hembras
70 – más
65 - 69
60 – 64
55 – 59
50 – 54
45 – 49
40 – 44
35 – 39
30 – 34
25 – 29
20 – 24
15 – 19
10 – 14
5 – 9
0 – 4
AÑOS
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0
200
400
600
800
1000
1200
1400

Fig. 6

Apéndice Documental 3

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Facultad de Humanidades y Educación
Escuela de Educación
Convenio Cooperativo de
Formación Docente

INTRODUCCIÓN

Para la realización del trabajo especial de grado para optar al título de Licenciado en Educación Mención Matemática; yo Argenis Arnaldo Algara Algara, venezolano, portador de la cédula de identidad N° V.- 6.361.904, necesito realizar una entrevista a algunos docentes quienes trabajan en la tercera etapa de la Educación Básica; concretamente en el 8° grado.

Para tal fin necesito que por favor usted me brinde su valiosa colaboración. Espero que me permita hacerle esta entrevista, la cual contiene un conjunto de siete preguntas, las cuales pretenden recabar algunas informaciones en relación con la problemática de la enseñanza de la matemática, especialmente en cuanto a su importancia social y la posibilidad de discutir modificaciones importantes en los programas de enseñanza.

La entrevista que realizaré tendrá preguntas de forma abierta, es decir, le permitirá extenderse en sus respuestas o profundizar en aquellos aspectos relacionados con cada una de las temáticas expresadas en las preguntas.

Para la realización de dicha entrevista, concretaré con usted la fecha idónea de la cita con el fin de entregarle el cuestionario con una semana de antelación para que tenga tiempo suficiente de reflexionar sobre las posibles respuestas.

El día de nuestra reunión me permitiré grabar la entrevista con la finalidad de tener una información precisa ya que ésta puede ser útil para la misma, y si el diálogo lo permite, haré preguntas que no estén en el cuestionario a medida que se desarrolla el tema.

Sin mas a que hacer referencia y dándoles las gracias por su importante y fructífera colaboración, quedo de Usted.

Muy atentamente,

____
Argenis Arnaldo Algara Algara

Apellidos y nombres del entrevistado (a): ______________________________________

Nombre del plantel: ______________________________

Grados que instruye: ______________________________

Cantidad de horas/semana: __________________________

Lugar y fecha de la entrevista: _________________________

Guía de entrevista para expertos

1.- ¿Cuál cree usted que es la situación actual de la enseñanza de la matemática en el 8° grado de la Educación Básica?

2.- ¿Qué hace la institución y sus colegas dedicados a la enseñanza de la matemática para mejorar o cambiar la situación actual?

3.- ¿Qué piensa Usted en cuanto a la idea de enseñar algunos contenidos matemáticos con situaciones de la vida diaria?

4.- ¿Está Usted de acuerdo con cambiar algunos contenidos sobre la enseñanza de la matemática de los programas, libros de texto y demás actividades que realizan los docentes por otros que le permitan al alumno relacionar directamente la matemática con la realidad?

5.- ¿Cuáles contenidos matemáticos del 8° grado pueden ser enseñados introduciendo temas de otras asignaturas o problemas sencillos cotidianos? Señale por favor su experiencia.

6.- En algunos casos se pueden plantear a los alumnos situaciones para la enseñanza de la matemática como la siguiente:

El tanque de gasolina de un carro tiene una capacidad de 60 litros. El conductor se da cuenta que tiene una reserva de 1/5 de su capacidad ¿cuánto habrá que pagar para llenar el tanque con gasolina con plomo, la cual cuesta 70 Bs./litro? (91 octanos). Últimamente también existe en Venezuela la gasolina sin plomo a un costo de 97 Bs./litro, ¿cuánto habría que pagar para llenar un tanque con capacidad de 80 litros con gasolina sin plomo? Las empresas automotrices hacen intentos por disminuir la cantidad de litros que requieren los motores en recorrer 100 Km. ¿Cuántos kilómetros recorrerá cada uno de los carros anteriores, suponiendo que el primero necesita $13\, {}^{l}\!/_{Km}$ y el segundo $7\, {}^{l}\!/_{Km}$? Comparar ambos carros según su rendimiento y el daño que le causa al medio ambiente. Discutir con los alumnos las desventajas y ventajas del uso del vehículo automotor.

¿Puede decirnos como trataría usted esta actividad en su curso?

7.- ¿Qué piensa usted en cuanto a la idea de que los alumnos deberían trabajar en las clases de matemática situaciones que les permitan reflexionar críticamente sobre algunos problemas de nuestra sociedad? ¿Conoce usted algunos ejemplos?

Apéndice Documental 4
Respuestas de los autores a los problemas de la prueba

Problema N º 1

Tu papá hará la reparación del techo de la sala de la casa, el cual es plano como se muestra en la Fig. 1. La reparación del techo tendrá un costo por metro cuadrado de 25.000 bolívares cada uno. Si él te pide determinar el costo total, según las medidas indicadas en la Fig. 1, ¿qué respuesta correcta le podrías dar?

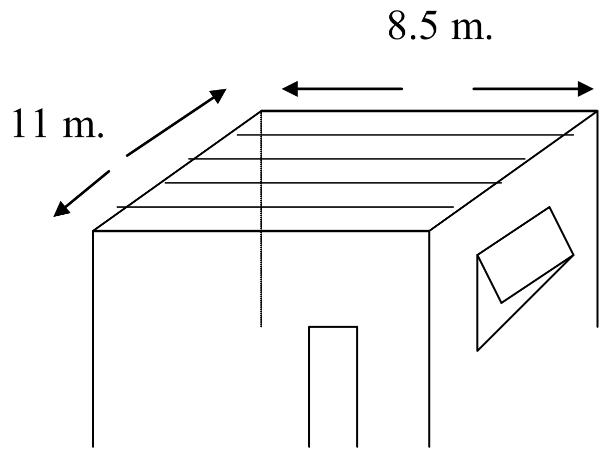


Fig. 1

Respuesta

Para calcular el costo total del trabajo lo primero que hay que saber es cuántos metros cuadrados tiene el techo de la sala de la casa. Como el techo tiene forma rectangular, para el cálculo de dicha superficie utilizamos la siguiente fórmula:

$A_{rectángulo} = b \cdot a$ donde A es el área, b la base y a la altura

Sustituimos los datos

$$A_{rectángulo} = b \cdot a = 8,5m \cdot 11m = 93,5m^2$$

Luego para el costo total del trabajo aplicamos la regla de tres simple:

$$Si \;\; 1m^2 \rightarrow Bs\,25000$$

$$93,5m^2 \rightarrow \quad x$$

$$donde \quad x = \frac{93,5m^2 \cdot Bs\,25000}{1m^2} = Bs\,2.337.500$$

$\boxed{\textbf{X = Bs.2.337.500}}$ es el costo total de la reparación.

Problema N ° 2 *

Una familia venezolana constituida por 2 adultos y cuatro niños necesitan 640.000 bolívares mensuales como cesta básica para el mes de mayo de 2.000. Ambos adultos tienen que trabajar para poder completar esa cantidad.

Fuente: www.spbancarios.com.br/saude/cesta.htm

a.- El gasto de la familia en útiles escolares, alimentación, calzado, transporte, vestido y vivienda representa ¾ partes del ingreso total, ¿cuánto dinero dispone la familia para los demás gastos?

b.- El sueldo mínimo actual es de 144.000 bolívares, ¿cuántos sueldos mínimos aproximadamente representa la cesta básica?

c.- Los niños no van a colegios privados porque el colegio más cercano cobra por cada niño Bs. 40.000 mensuales, ¿qué parte de la cesta básica necesitaría esta familia para pagar un colegio privado en Venezuela?

***Es importante resaltar que los datos fueron tomados del periódico para el año 2000 y ellos han variado por efectos de la inflación**

<u>Respuesta</u>

a) Para saber cuánto dispone la familia para los demás gastos, debemos saber cuánto gastó de los Bs.640.000

Calculamos las ¾ partes de la cesta básica:

$$Bs.\,640.000 \cdot \frac{3}{4} = Bs.\,480.000 \quad (gasto)$$

Ahora, para saber cuánto queda para los demás gastos, a la cesta básica le restamos lo que se gastó:

Bs. 640.000 – Bs. 480.000 = Bs. 160.000

Entonces, para los demás gastos, la familia dispone de Bs. 160.000

b) Para saber cuántos sueldos mínimos actuales representa la cesta básica, se divide la cesta básica entre el sueldo mínimo actual:

$$\frac{Bs.640.000}{Bs.144.000} = \frac{40}{9} = 4\,{}^{4}\!/_{9} = 4,\overset{\frown}{4}$$

La cesta básica representa, aproximadamente, cuatro y medio sueldos mínimos.

c) Para saber qué parte de la cesta básica necesitará la familia para pagar el colegio, aplicamos una regla de tres simple:

$$\begin{aligned} si\ \ Bs.640.000 &\rightarrow 100\% \\ Bs.160.000 &\rightarrow \quad x \end{aligned}$$

Entonces $$x = \frac{Bs.160.000 \cdot 100\%}{Bs.640.000} = 25\%$$

La familia necesitaría 25% de la cesta básica para pagar el colegio

Problema N° 3

Los alumnos de 8vo grado de dos escuelas de la parroquia Antímano son invitados a una exposición en el Museo de Ciencias Naturales. En las listas aparece un total de 950 alumnos. En la estación del Metro de Antímano una profesora observa que hay 28 hembras más que varones, ¿cuántas alumnas y alumnos van al Museo?

Foto: Marco Antonio Barrios

Respuesta

Para darle solución a este problema utilizamos una ecuación.

Sea X la cantidad de varones que van al museo.

Si para el museo van X Varones, entonces al museo van (X + 28) hembras.

Luego

X (varones)+(X + 28) (hembras)= 950 alumnos

De aquí $x+(x+28)=950 \Rightarrow 2x+28=950 \Rightarrow 2x+28-28=950-28$

$$\Rightarrow 2x = 922 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2x = \frac{1}{2}\cdot 922 \Rightarrow x = \frac{922}{2} \Rightarrow x = 461$$

Concluimos que al museo van 461 varones y (461+28)=489 hembras

Problema N° 4

Una familia de Antímano, donde llega el agua con poca frecuencia, tiene en la azotea de su casa tres recipientes (tanques) para almacenar el preciado líquido. En la Fig. 2 se muestran las medidas de los tres tanques.

a.- ¿Cuánto volumen tiene cada tanque?

b.- Cuando falta el agua, los camiones cisternas se encargan de llenar en algunos lugares los tanques a un costo de 15.000 bolívares por cada 3.000 litros de agua, ¿cuánto tiene que pagar la familia para poder llenar los tres tanques?,¿Cuánto cuesta cada litro de agua?

c.- El tercer tanque presenta problemas y para sustituirlo la familia adquiere tres pipotes de igual tamaño con las medidas como se indica en la Fig.3, ¿son suficientes para almacenar la cantidad de agua del tercer tanque?

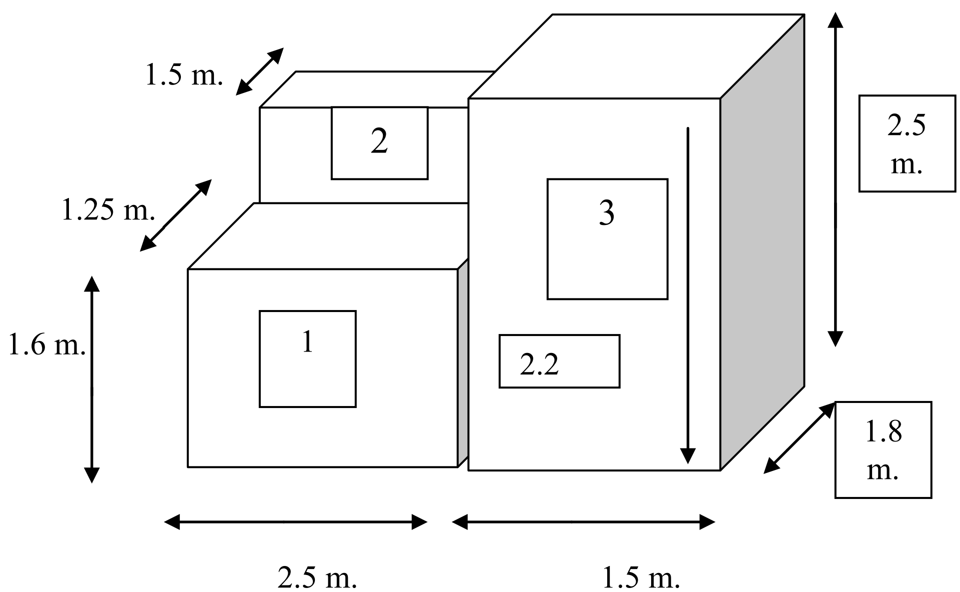


Fig. 2

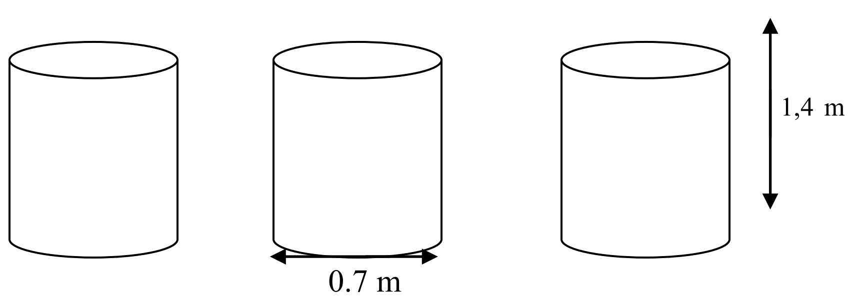


Fig. 3

Resolución del problema

a) ¿Cuánto volumen tiene cada tanque?

Como cada tanque tiene forma de paralelepípedo, utilizamos la siguiente fórmula para calcular el volumen:

$$V = A_{base} \cdot h = l \cdot an \cdot a \quad donde \begin{cases} V \text{ es el volumen del paralelepípedo} \\ A_{base} \text{ es el área de la base} \\ h \text{ es la altura} \\ an \text{ es el ancho} \\ l \text{ es el largo} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Llamemos } & V_1 \text{ al Volumen del 1er tanque} \\ & V_2 \text{ al Volumen del 2er tanque} \\ & V_3 \text{ al Volumen del 3er tanque} \end{aligned}$$

$$V_1 = l \cdot an \cdot a = 2,5m \cdot 1,25m \cdot 1,6m = 5m^3$$
$$V_2 = l \cdot an \cdot a = 2,5m \cdot 1,5m \cdot 2,2m = 8,25m^3$$
$$V_3 = l \cdot an \cdot a = 1,5m \cdot 1,8m \cdot 2,5m = 6,75m^3$$

b) ¿Cuánto tiene que pagar la familia para poder llenar los tres tanques?

Para ello debemos saber cuántos litros hay en total en los tres tanques.

Utilizamos la equivalencia entre m³ y litro y aplicamos regla de tres.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 5m^3 + 8,25m^3 + 6,75m^3 = 20m^3$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} Si \quad 1m^3 &\rightarrow 1000L \\ 20m^3 &\rightarrow x \end{aligned}$$

Entonces $x = \dfrac{20m^3 \cdot 1000L}{1m^3} = 20.000L$

La capacidad de los tres tanques es de 20.000 litros.

Para la pregunta relacionada con el costo utilizamos la regla de tres:

$$\begin{array}{ll} Si\ \ Bs.15.000 & \rightarrow 3000L \\ \quad x & \rightarrow 20.000L \end{array}$$

Entonces $x = \dfrac{20.000L \cdot Bs.15.000}{3000L} = Bs.100.000$

El costo de llenado de los tres tanques es de Bs.100.000

¿Cuánto cuesta cada litro de agua?

$$\begin{array}{ll} Si\ \ Bs.15.000 & \rightarrow 3.000L \\ \quad x & \rightarrow \quad 1L \end{array}$$

Entonces $x = \dfrac{Bs.\ 15.000 \times 1L}{3.000L} = Bs.5$

Cada litro de agua cuesta 5 bolívares

c) Cálculo del volumen de un pipote

Llamemos al volumen del cilindro (forma geométrica del pipote) V_c

$$V_c = \pi \cdot r^2 \cdot a = 3,14 \cdot (0,35m)^2 \cdot 1,4m = 0,53851m^3$$

Cálculo del volumen de los tres pipotes

$$3V_c = 3 \cdot 0,53851m^3 = 1,61553m^3$$

En el tercer tanque se almacena 6,75 m³ y en los tres pipotes 1,61553 m³, es decir, los tres pipotes no son suficientes para almacenar el agua del tercer tanque.

Veamos cuántos pipotes realmente se necesitan

$$\begin{aligned} Si\ 1p &\rightarrow 0,53851m^3 \\ x &\rightarrow \quad 6,75m^3 \end{aligned}$$

$$Entonces \quad x = \frac{1p \cdot 6,75m^3}{0,53851m^3} = 12,53p$$

Se necesitan aproximadamente 13 pipotes

Problema N° 5

En una fiesta en el Parque del Este en Caracas se ofrece un juego con dados ciegos y dos tableros como se observa en la Fig. 4. Cada jugador lanza un dado dos veces, primero sobre el tablero 1 y luego sobre el tablero 2. El jugador obtiene un regalo cuando el dado cae sobre una de las casillas oscuras. ¿En cuál de los dos tableros es mayor la oportunidad de ganar? ¿Por qué?

Tablero 1 Tablero 2

Fig. 4

Respuesta

Estamos en presencia de un evento, en el cual tenemos una probabilidad de que ocurra o no. El experimento consiste en lanzar un dado ciego sobre el tablero 1 y ver cuál es la probabilidad de que caiga sobre las casillas oscuras.

Sea E el evento cae en "casilla oscura"

$$P(E) = \frac{casos \;\; favorables}{casos \;\; posibles} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Ahora veamos el mismo experimento pero sobre tablero 2

$$P(E) = \frac{casos \ \ favorables}{casos \ \ posibles} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} = 0,2222...$$

Por lo tanto la mayor probabilidad de ganar está en el tablero 1.

Problema N° 6

El gobierno decide ayudar a las familias sin vivienda con la compra de una parcela en el interior del país. Las dimensiones de algunas parcelas son similares a las de la **figura 5**. Una de las personas que recibió su parcela decide cercarla para lo cual desea colocar en cada esquina una columna (horcón) de madera. Además, la persona quiere que todas las columnas tengan la misma separación y que ésta última sea lo más grande posible.

a.- ¿Cuántas columnas necesita colocar el nuevo dueño de la parcela?

b.- ¿Cuánto dinero gasta el dueño sabiendo que cada metro lineal de cerca metálica cuesta Bs. 45.000 y cada columna Bs. 27.000?

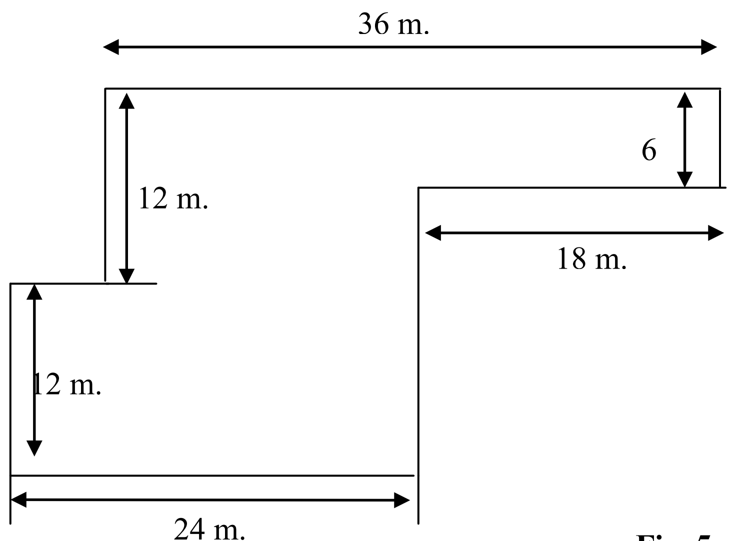


Fig. 5

<u>Respuesta</u>

a) Como la persona quiere un horcón en cada esquina y éstos deben estar a igual distancia uno del otro con una separación lo más grande posible, tenemos que considerar lo siguiente:

La menor distancia entre esquina y esquina es de 6 m y se observa que las otras distancias son múltiplos de 6, por lo tanto la mayor distancia a la que pueden estar los horcones es de 6 m.

$$7 + 1 + 3 + 3 + 4 + 2 + 2 = 22$$

$$\boxed{\text{Se necesitan por lo tanto 22 horcones}}$$

b) El perímetro del terreno es el siguiente

$$6 + 12 + 12 + 36 + 6 + 18 + 1\ 8 + 24 = 132 \text{ m}$$

Como cada metro lineal cuesta bolívares 45.000, multiplicamos los 132 m por esa cantidad y nos da el costo en cerca metálica.

132 x Bs.45.000 = Bs.5.940.000

$$\boxed{\text{El gasto en total en tela metálica es de Bs.5.940.000}}$$

Veamos ahora el costo de los 22 horcones

22 x Bs.27.000 = Bs.594.000

$$\boxed{\text{El costo de los 22 horcones es de Bs. 594.000}}$$

Costo total

$$\boxed{\text{Bs.5.940.000 + Bs.594.000 = Bs.6.534.000}}$$

Problema N° 7

A raíz de la catástrofe natural que ocurrió el 16 de Diciembre de 1999, quedaron destruidas muchas viviendas. Se dice que una familia de clase media alta tenía un seguro de vivienda por Bs. 60.000.000. El seguro decide pagar solamente $\frac{2}{5}$ partes de esa cantidad por los daños causados. ¿Cuánto recibiría la familia por la perdida de su vivienda? ¿Esa cantidad representa el 40% del monto asegurado?

Respuesta

Para sacar los 2/5 de 60.000.000, procedemos de la siguiente manera:

$$60.000.000 \cdot \frac{2}{5} = 24.000.000$$

La familia recibirá por la perdida de su vivienda 24.000.000 de bolívares

Veamos ahora cual es el 40% de Bs. 60.000.000

$$\begin{array}{rcl} Bs\ 60.000.000 & \rightarrow & 100\% \\ x & \rightarrow & 40\% \end{array}$$

$$x = \frac{40\% \cdot Bs\, 60.000.000}{100\%} = Bs\, 24.000.000$$

Por lo tanto la cantidad que recibió la familia representa el 40% del monto asegurado

Problema N° 8

En la **figura 6*** se representa una pirámide de la composición de la población venezolana por edad y sexo según el censo de 1991 (los valores de la última fila deben multiplicarse por 1.000 para obtener los resultados en millones). Responde las siguientes interrogantes:

a) ¿Cuántas personas aproximadamente habían en Venezuela con una edad comprendida entre 15 y 19 años?
b) ¿Cuál de los grupos a partir de 70 años es mayor?
c) ¿Se puede decir que hay más varones que hembras entre 45 y 49 años? Explica.
d) ¿Según la gráfica, quiénes tienen mayor posibilidad de tener una vida más larga?
e) ¿Para cuál edad existía mayor cantidad de personas?

*Ver **figura 6** en el apéndice documental 2.

<u>Respuestas</u>

a) 1.000.000 hembras + 1.000.000 varones = 2.000.000 personas

b) A partir de los 70 años es mayor el grupo de hembras que llega casi a 400.000, mientras que los varones son 300.000.

c) Hay más varones que hembras ya que en la gráfica se ve que hay casi 500.000 varones y hembras un poco más de 400.000

d) Las mujeres

e) De 0 a 4 años con 2.800.000

Apéndice Documental 5

Ejemplos de ejercicios y problemas extraídos de los textos analizados

Textos de 7mo grado

Ejemplos del texto A: Matemática Constructiva de Uribe y Berrío

Ejercicios

1) Encuentre el número que falta en cada recuadro:

$$\square + 3 = 8$$

$$2 \cdot \square = 12$$

$$3 \cdot \square + 4 = 7$$

$$\square - 6 = 9$$

2) ¿Qué número utilizaría
   a) Para indicar que una persona debe Bs. 157?
   b) Para señalar que la temperatura en este momento es de 5ºC bajo cero?
   c) Para indicar que un submarino navega a 50 m de profundidad?

3) ¿Qué unidad de capacidad elegirías para medir
   a) La capacidad de un camión cisterna?
   b) La capacidad de una lata de aceite de cocina?
   c) La jarra de agua de la nevera?
   d) Un balde para limpiar el piso?

Problemas pseudo-cotidianos

1) ¿Qué número sumado a 15 da como resultado 100?

2) ¿Cuáles son los tres números naturales consecutivos que suman 39?

3) El perímetro de un terreno rectangular es de 120 m. si su largo es el doble del ancho

4) ¿Cuáles son sus medidas?

5) Gustavo apostó el triple de su sueldo menos Bs. 15 y recuperó dos veces su sueldo más Bs. 10. ¿Qué cantidad de dinero perdió Gustavo?

6) El terreno de una finca mide 27 hm^2, 16 dm^2, 23 m^2 y 35dm^2. ¿Cuántos m^2 mide la finca?

7) ¿Cuál es el área en m^2 de un terreno que tiene 8 ha y 5 cuadras?

8) Los 3/5 de una finca de 4 ha y 6 cuadras están cultivadas de árboles frutales y el resto de café. ¿Cuántos metros cuadrados están cultivados de café?

9) ¿Cuántos paquetes de galletas de base cuadrada de lado 13cm y altura 29cm, se pueden empacar en una caja cuyas dimensiones son: largo 1,17cm, ancho 0,9cm y alto 1,04cm, si los separadores ocupan <u>2/3</u> de la caja?

10) En un depósito de agua con capacidad de 4kl, 5hl y 7dal. Se abre un grifo que derrama 4l por minuto. ¿Cuánta agua tendrá al cabo de una hora?

11) Un depósito de gasolina contiene 4kl, 5hl, 5l y sacamos 1kl, 8kl, 6dal. ¿Cuánto queda en el depósito?

12) Hemos sacado 4 veces con un balde de 2dal de capacidad agua de un depósito que contenía 8hl, 3dal y 6 L. ¿Cuánta agua hemos sacado? ¿Cuánta agua queda en el depósito?

Problemas cotidianos

1) En cierto lugar de la Cordillera de los Andes en un día de invierno, se registró una temperatura de 8° c a las 18 horas. A las 23 horas se comprobó un descenso de 20° C, ¿cuál fue la temperatura registrada a esa hora?

2) ¿Cuál es el volumen de un salón en el cual caben exactamente 825 cajas, si cada una de ellas tiene un volumen de un metro cúbico?

3) Hallar el volumen de un cuarto rectangular cuyas dimensiones son: largo, 6m, ancho, 3m y alto, 7m.

4) Una caja tiene las siguientes medidas: largo, 1,5m; ancho 1,2m y alto 2,4m.

5) ¿Cuántas cajas cúbicas de arista 30cm se pueden empacar en la caja grande?

6) A un cono de helado que tiene 12,5cm de altura y 5cm de diámetro, se le echan dos cucharadas semiesféricas de helado, de diámetro 5cm. Si el helado se derrite dentro del cono, ¿Se derramará?

Ejemplos del texto B: Matemática de Santillana

Ejercicios

1) Halle el valor de x

   a) $(-4) + (+6) = (-4) + X$

   b) $(+6) + X = (+6) + (-3)$

   c) $(-1) + X = 0 + (-1)$

2) Construye un cuadrado cuya diagonal mida 5 cm. Construye un rectángulo de perímetro 80 mm y de altura 10 mm.

Problemas pseudo-cotidianos

1) Roberto tiene Bs. 200 en su billetera y su papá le da Bs. 75 para su traslado a la escuela, ¿cuánto dinero tiene ahora Roberto?

2) Jennifer le debe Bs. 120 a Ricardo y le pide Bs. 360 más, ¿Cuánto dinero debe ahora Jennifer?

3) Carlos tiene Bs. 350 y debe a su mamá Bs. 98, ¿cuánto dinero le quedará a Carlos después de pagar la deuda a su mamá?

4) Walter tiene Bs. 394, debe Bs. 536 a Ángela. si Walter entrega todo su dinero a Ángela, ¿cuánto dinero debe todavía?

5) Vanessa estudió 2 ¾ de hora el Lunes, 5 5/8 de hora el Martes, 7 1/12 de hora el Miércoles y 1 1/24 el Jueves. ¿Cuántas horas estudió en total?

6) Se tiene 3/5 de pastel y Luis Enrique toma 1/7. ¿Qué fracción de pastel queda?

7) En una hacienda se han sembrado 1/3 de arroz, 2/5 de papas y el resto de maíz. ¿Qué parte de la hacienda está sembrada de maíz?

8) Se necesita llenar los 4/5 de una piscina. En la mañana se ha llenado 1/5 y en la tarde 3/7 de dicha piscina. ¿Cuánto falta por llenar?

9) Un campesino ordeña una vaca y llena 12 botellas. Si cada una contiene 8/6 de litro y vende 8 litros en el pueblo cercano. ¿Cuántas botellas de leche deja para su consumo y cuántos litros son en total?

10) Un reloj se adelanta por día 24 minutos. ¿Cuánto se adelantará en ¾ de día?

11) Luis tiene los siguientes gastos mensuales: 1/3 del sueldo en vivienda, 2/9 en comida, 1/6 en colegio y 4/27 en gastos de mantenimiento. Si el resto del sueldo lo ahorra. ¿Qué fracción representa dicha parte?

12) En una hacienda los 3/8 de su extensión cultivable está sembrado de maíz, 1/5 de arroz, 3/10 de yuca y el resto de lechosa. ¿Qué parte está sembrada de lechosa?

13) En un recipiente se han vaciado sucesivamente: 2 litros, ¾ litros y 2,8 litros. Si su capacidad es de 10 litros. ¿Cuánto falta por llenar aún?

14) Un maratonista ha recorrido los 23/40 del trayecto, ¿cuánto le falta aún para recorrer?

15) ¿Cuál es el área total de un tubo de acero de forma cilíndrica recta, si el radio de su base mide 0,5m y 2m de largo? ¿Cuántos galones de pintura son necesarios para pintar 100 tubos, si cada galón cubre aproximadamente 31, 4 m^2?

16) Un tanque tiene 12m de largo, 5 m de ancho y 2,5m de profundidad. Se pinta el tanque a Bs. 1200 el m^2 ¿cuánto costará pintarlo totalmente?

17) Se desea cavar un pozo cilíndrico de 3,4m de diámetro y 8,5m de profundidad, ¿Cuántos metros cúbicos de tierra habrá que remover?

18) Un tanque tiene 12m de largo, 5m de ancho y 2,5m de profundidad. Se pinta el tanque a Bs. 1200 el metro cuadrado, ¿Cuánto costará pintarlo totalmente?

19) El cono de una barquilla tiene una generatriz de 12cm y 5cm de diámetro. Se ponen en él dos esferas de helado del mismo diámetro de la barquilla. Al derretirse el helado dentro del cono, ¿Rebasa éste la altura del cono?

20) ¿Cuál es la capacidad en Cm^3 de un tanque en forma de esfera si su radio es 2,5dm?

21) Calcula la capacidad en centilitros de un vaso de cartón en forma de cono cuyo diámetro de la base es 5cm y su altura 10cm.

Problemas cotidianos

1) Normalmente el Sr. Salcedo inicia sus recorridos en el metro a partir de la estación Bellas Artes. Si él recorre 6 estaciones al este y enseguida 10 al oeste, ¿a qué estación llegará?

2) Leonardo compra 5 ½ kilogramos de papas y Daniel compra 7 ¼ kilogramos. Ambos colocan su compra en una bolsa que sólo resiste 13 kilogramos. ¿Soportará la bolsa el peso de los productos comprados?

3) Para elegir el coordinador de un equipo con 5 integrantes se hará lo siguiente: en una bolsa se colocarán 5 pelotas numeradas del 1 al 5; cada integrante del equipo tomará una bola al azar y el coordinador será aquel que saque la bola marcada con el número 3. ¿Cuál es la probabilidad que tienen los integrantes del equipo de ser coordinador del mismo?

4) Se desea elegir al azar a los participantes de un concurso de gynkana, en un grupo de 38 alumnos de los cuales, 21 son mujeres y 17 son hombres. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un participante sea del sexo masculino? ¿ Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

5) Se elige al azar al representante de una sección de 7º grado de Educación Básica, si se sabe que en total hay 35 alumnos y que de ellos 26 son mujeres, halla las siguientes probabilidades de

   a) que el elegido sea del sexo masculino.
   b) que el elegido sea mujer
   c) ¿cuánto suman las dos probabilidades anteriores y qué significa?

6) En una fiesta diplomática hay 30 personas que hablan español, 23 que hablan inglés y 12 que hablan francés; se elige una persona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que hable ingles?

7) Si en un salón de clases dan a cada alumno un número diferente para realizar una rifa con un sólo premio, ¿Cuál es la probabilidad de que te corresponda el premio?, ¿Qué ocurre si en lugar de un premio hay tres?

8) En un establo hay 8 caballos y 4 yeguas. Si se escapa un ejemplar, calcula la probabilidad de que sea una yegua la que se haya escapado.

9) Un voleibolista ha logrado durante la temporada un mate efectivo en 18 de las 25 veces que lo ha intentado, ¿Cuál es la probabilidad que en la próxima oportunidad que lo intente no logre el mate?

Ejemplos del texto C: Matemática de Breijo y Domínguez

Ejercicios

1) Escribe 5 ejemplos de experimentos aleatorios.

2) Escribe 5 ejemplos de experimentos no aleatorios o determinísticos.

3) Escribe 5 sucesos seguros. ¿Cuál es su probabilidad?

4) Escribe 5 sucesos imposibles ¿Cuál es su probabilidad?

Problemas pseudo-cotidianos

1) ¿Qué número hay que sumar a 23 para obtener 107?

2) En una Escuela Básica hay 1160 alumnos. Si en la primera etapa son 40 alumnos más que en la segunda y en la tercera 20 alumnos menos que la segunda. ¿Cuántos alumnos hay en cada etapa?

3) En un almacén de productos de limpieza se envasan 648 pastillas de jabón en tres tamaños de caja (pequeña, mediana y grande). Sabiendo que la caja mediana lleva 72 pastilla más que la pequeña y la grande lleva el doble que la pequeña, ¿Cuántas pastillas lleva cada caja?

4) A razón de Bs. 375 el m^2 ¿cuánto se debe pagar por una parcela de forma cuadrada que mide 37 x 37 m?

5) Si el radio de la rueda de una bicicleta mide 40 cm. ¿Cuántos Km. habrá recorrido un ciclista después que las ruedas dieron 20.000 vueltas?

6) ¿Cuánto costará poner cerámica a las paredes y piso de tres baños de forma de prisma si sus medidas son: 2,05m por 1,65m por 2,8m, y el metro cuadrado cuesta Bs. 150?

7) En un edificio hay un tanque de agua de forma paralelepipédica cuyas medidas son: 5m por 4m por 3,5m. Si el edificio tiene 20 departamentos y cada apartamento consume 1000 litros de agua diariamente, ¿Para cuántos días llegara el agua si está lleno?

8) Decimos que un frasco contiene 15cc; ¿A cuántos litros equivale?

9) Averigua el volumen de los distintos océanos y expresa dicho volumen en litros.

10) Una piscina de borde rectangular y profundidad uniforme tiene las siguientes medidas: ancho = 25m; largo = 50m y profundidad = 1,4m. Calculemos su volumen y capacidad en litros cuando está llena.

11) Un tanque de agua en forma esférica tiene un diámetro de 1,20m. Calcula su capacidad en litros.

Problemas cotidianos

1) Calcular los m^2 que tiene un terreno de forma rectangular sabiendo que tiene las siguientes medidas: 75 x 43,7 m respectivamente.
2) Cuantas hectáreas tiene un terreno de forma rectangular si sus dimensiones son 800 m por 347 m?

3) ¿En una caja hay 13 billetes de 10 Bs. y 7 billetes de 20 Bs. Se extrae un billete al azar. ¿Qué probabilidad hay de que sea de 20 Bs.?

4) En un salón de 40 alumnos aprobaron un examen de matemática 24 alumnos. Si elegimos un alumno al azar. ¿Qué probabilidad hay de que el alumno esté aprobado?

Ejemplos del texto D

Ejercicios

1) Complete los siguientes recuadros:

a) $9 + \boxed{} = 28$

b) $98 - \boxed{} = 22$

c) $9 \times \boxed{} = 72$

d) $810 : \boxed{} = 27$

2) Halle el valor de la x:

a) $9 + X = 28$

b) $98 - X = 22$

c) $9 \cdot X = 72$

d) $810 : X = 27$

3) número sumado a 498 da como resultado 1.451

4) triple de un número excede a su doble en 15

5) número dividido entre 27 da como resultado 480

6) ¿Qué valores enteros puede tener X en cada una de las desigualdades siguientes?

$| X | > 4$ $| X | < 2$

7) Aplicar las propiedades asociativa y conmutativa para sumar 5 monedas de 5 bolívares + 10 monedas de 2 bolívares + 5 monedas de 0,50 bolívares + 8 monedas de 5 bolívares + 9 monedas de 0,50 bolívares

Problemas pseudo-cotidianos

1) La suma de tres números naturales consecutivos es 894 ¿Cuáles son los números?

2) La edad de María es el doble de la edad de Martín y la suma de las edades es 96 años. Calcular las edades de María y Martín.

3) Un padre reparte una herencia de 500.000 Bs. entre sus tres hijos, de tal manera que al menor le corresponda 14.800 Bs. más que al segundo hijo y al mayor el doble de lo que le corresponde al segundo menos 13.500 Bs. Determinar la parte que le corresponde a cada hijo.

4) Sobre un edificio de $46\frac{2}{3}$ de altura se instaló una antena parabólica de $6\frac{4}{5}$ de altura. ¿A qué altura del suelo se encuentra un ave que se posa sobre la antena?

5) Un agricultor perdió $\frac{2}{9}$ de su cosecha durante 2 años consecutivos y perdió 1/9 de su cosecha durante los siguientes 3 años. Si siembra la misma cantidad ¿Cuánta cosecha perderá al final del quinto año?

6) Un agricultor vende ¼ de su parcela, alquila 7 7/10 y cultiva la otra parte, ¿qué parte de la parcela cultivó?

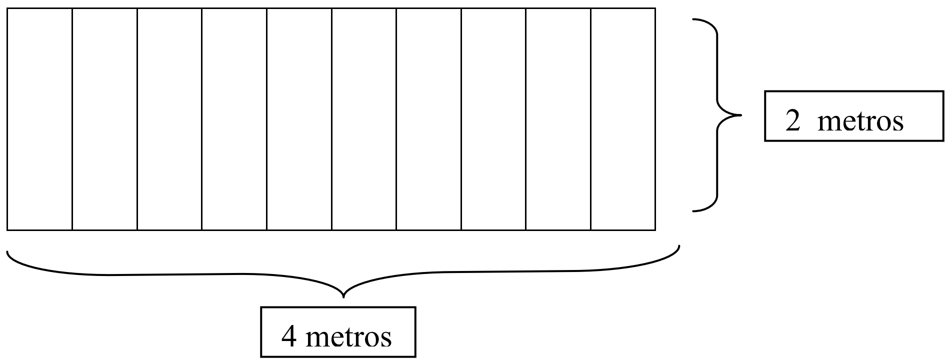
7) Un avión inicia su recorrido con 300 litros de gasolina desde Mérida; la llegar a Coro el avión había gastado 40 3/5 litros, de Coro a Barquisimeto gastó 40 2/9 litros, de Barquisimeto a Maracay gastó 50 1/6 litros y cuando arribó a Caracas le quedaban 102 4/9 litros. ¿cuánta gasolina gastó entre Maracay y Caracas?

8) Luisa tiene un reloj que se adelanta 3/8 de minutos cada hora. ¿Cuánto adelantará en 5 horas? ¿y en un día?

9) El kilogramo de tomates y el kilogramo de verduras cuesta 19 ¾ bolívares. Si Mercedes compró 8 ¼ kilogramos de tomates y 3 ¾ de verduras. ¿Cuánto gastó?

10) La tonelada de caña de azúcar es pagada a 425 bolívares. ¿cuánto recibirá un cañero que entrega 492 ¾ de toneladas?

11) ¿Cuántos metros de cabilla se necesitan para hacer una reja de seguridad como lo muestra la figura?



12) ¿Qué superficie vegetal queda en un jardín de 26 metros de largo y 14,50 m de ancho, si se construye dentro del jardín una fuente de 3 m de radio?

13) El área de un trapecio es 950 m^2, determinar la medida de la base mayor si la medida de la base menor es 17 cm y la altura es 2,5 cm

14) El área de un polígono regular es 648 cm^2. si la apotema mide 6 cm y la longitud de un lado es 12 cm, determinar el número de lados del polígono.

15) El área de un rombo mide 644,76 m^2 y uno de sus diagonales es 32, 4 cm. Calcular la otra diagonal.

16) El área de un decágono regular es 320 m^2, si la apotema mide 4 m determinar la longitud de sus lados.

17) Un camionero debe acarrear 26 m^3 de arena, si en cada viaje lleva 3,25 m^3 de arena ¿Cuántos cobrará si cada carga de arena cuesta 200 bolívares?

18) ¿Cuántos centímetros cúbicos se pueden calcular sobre un cuadrado de un metro de lado?

19) ¿Cuántos decímetros cúbicos se pueden colocar sobre un cuadrado de 2 metros de lado?

20) ¿Cuántos decímetros cúbicos se pueden colocar sobre un rectángulo de 2 metros de largo y 1 metro de ancho?

21) ¿Cuántos decímetros cúbicos se puede colocar sobre un cuadrado de 1 metro de lado y hasta una altura de 5 decímetros?

22) ¿Cuántos metros cuadrados de aire hay en una habitación cuyas medidas son: 34,8dm y 3m?

23) Los diámetros de las pelotas de béisbol y de sofbol son 6cm y 10cm respectivamente. ¿Cuál es la diferencia en sus volúmenes?

24) ¿Qué cantidad de aire contiene una pelota de playa inflada cuyo diámetro es de 30cm?

25) ¿Cuántos litros de petróleo hay en barril de 860 cm^3?

26) En una finca hay un cilindro circular recto que tiene las siguientes medidas: 2 metros de radio y 3 metros de altura. Llegan 3 camiones cisterna con 37.600 litros de gasoil. ¿Tiene el tanque la capacidad suficiente para almacenar el gasoil?

27) ¿Cuánto debe ser la medida en cm^3 de un recipiente para contener medio litro de helado?

28) ¿Cuál es la capacidad en litros de un recipiente de refresco cuyo volumen es 768 cm^3?

29) Si un tanque de gasolina de un camión tiene una capacidad para 150 litros y el largo del tanque es 1 metro y su ancho 30cm, determinar su altura.

Problemas cotidianos

1) Una cuenta de ahorros muestra los siguientes operaciones durante el mes de abril. Determine el saldo final.

Retiros (Debe)	Aportes (Haber)	Saldo (Final)
		11837,00
	2810	
3524		
238		
	1213	
396		
	685	
130		
	496	
	Saldo Final	12753

2) ¿Cuántos litros de agua caben en un tanque cuyas medidas son: 8 metros de largo, 4 metros de ancho y 3 metros de altura?

3) En la clase de matemática de séptimo grado hay 30 alumnos, 19 hembras y 11 varones:

a) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un alumno de determinado?
b) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una niña?
c) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un niño?

4) En un parque zoológico hay 30 especies de animales. De las 30 especies, 15 son voladoras y de las 15 voladoras 10 son pájaros. Si seleccionamos al azar una especie del parque

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea pájaro?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea voladora?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea voladora y pájaro?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el parque?

5) En un grupo de 52 niños hay 4 niños que son hermanos. ¿Cuál es la probabilidad P de seleccionar uno de los hermanos si lo seleccionamos al azar?

6) Tengo tres monedas de un bolívar en el bolsillo. ¿Cuál es la probabilidad P que al sacar las tres monedas por lo menos una esté del lado del escudo?

7) En una cesta tapada hay 4 naranjas, 3 guayabas y 5 mangos ¿Cuál es la probabilidad P que al sacar una fruta sea mango?

8) Tengo un juego de barajas españolas de 40 cartas. ¿Cuál es la probabilidad P de sacar un caballo? Y si dejo aparte la carta que salió y ahora intento sacar un rey ¿Cuál es la probabilidad P de sacar el rey si la carta que dejó aparte es un rey?

9) En una biblioteca hay 10 libros de lenguaje, 6 de química, 5 de matemática y 5 de ingles. Determinar la probabilidad P que al seleccionar un libro al azar a) de lenguaje, b) de química, c) de matemática ó d) de inglés.

10) En un evento nacional deportistas de 15 deportes diferentes. De los 15 deportes 8 son al aire libre y 7 son bajo techo. Si seleccionamos al azar un deporte de ese evento. ¿Cuál es la probabilidad que no sea bajo techo?

11) Un matrimonio decide tener tres hijos. ¿Cuál es la probabilidad que el primero sea hembra y los otros dos varones?

12) Demuestre en un diagrama de árbol la forma en qué en un torneo de tenis el ganador de dos juegos consecutivos o que complete tres es el triunfador.

13) Mariana, Julio y Carmen están jugando a las posiciones que puedan ocupar respetando el orden: primera, segundo y tercera. Si comienzan en el orden en que son nombrados en el problema construir un diagrama de árbol donde se ordenen las posiciones.

Textos de 8vo grado

Ejemplos del texto E:Matemática E. B. de Salazar y Rojas

Ejercicios

1) La temperatura promedio del ser humano es de 37º C. Describe la temperatura de los siguientes animales con relación a la temperatura del ser humano: (Pág. 23)

Oso polar	38ºC
Elefante	36ºC
Cabra	40ºC

Problemas pseudo-cotidianos

1) El señor Pérez gasta mensualmente ¼ de su sueldo en comida, 1/6 en colegio y 1/12 en vestidos.

¿Qué parte de su sueldo gasta mensualmente?
¿Cuánto pudiera ahorrar si gana Bs. 14.800?

2) Dos socios se reparten las ganancias de una empresa. El socio A tiene derecho a las 3/5 de la ganancia y el socio B recibe el resto, que fueron Bs. 8.500. ¿Cuál es la ganancia total y cuánto recibió el socio A?

3) Pedro tiene Bs. 84 y Rosa tiene Bs. 20, ¿Cuánto debe regalarle Pedro a Rosa para que tengan igual cantidad de dinero?

4) En un salón de clase hay 48 alumnos. Si el número de hembras es el triple que el de varones, ¿Cuántos varones y cuántas hembras hay en el salón?

5) Cinco socios compraron una casa contribuyendo en partes iguales. Si hay un socio más, cada uno hubiera pagado. Bs. 8.000 menos, ¿Cuánto costó la casa?

6) Un señor gasta 2/3 y 1/5 de cierta cantidad de dinero. ¿Cuánto le queda de esa cantidad?

7) Un cuerpo perdió 3/10 de su masa por merma; los 5/8 de la masa restante fue 2.000Kg.¿Cuál era la masa del cuerpo antes de la merma?

8) Un equipo ha ganado 11 juegos y ha perdido 9. ¿Cuántos juegos debe ganar consecutivamente para tener 2/3 de juegos ganados?

9) Un almacén ofrece un descuento del 30% sobre artículos con precios mayores o iguales a Bs. 50. Si tienes BS 420, ¿Qué precio marca el artículo más costoso que tú puedes comprar?

Problemas cotidianos

1) En 1974 el estado Zulia producía, aproximadamente, 4/5 partes del petróleo venezolano. ¿Cuánto producía el resto del país?

2) En la composición de la atmósfera, aproximadamente el 39/50 es nitrógeno y el 21/100 es oxígeno. ¿Cuánto corresponde a los otros gases?

3) Juan puede pintar una pared en 8 h y Pedro puede hacerlo en 5 h. ¿Cuánto tiempo tardarán si realizan juntos el trabajo?

4) María y Petra pueden realizar un trabajo juntas en 4 h. Si María sola puede realizarlo en 6 h, ¿Cuánto tiempo tardará Petra en hacerla sola?

Ejemplos del texto G: Matemática de Breijo y Domínguez

Problemas pseudo-cotidianos

1) ¿Qué fracción de un año bisiesto representa 4 días?

2) Un obrero levantó 3/7 de una pared; si faltan 28 m por levantar. ¿Cuánto mide la pared?

3) Hallar dos números que estén en la relación ¾ y que su m.c.d. sea 30.

4) La edad de Alberto es los 5/6 de la edad de Vinicio y este tiene 24 años ¿Qué edad tiene Alberto?.

5) Un depósito pierde 5 litros y ¼ por minuto; si tarda en vaciarse 6 horas ¿Cuál es la capacidad del depósito?

6) La distancia entre dos ciudades es de 160 Km. ¿Cuántas horas debe andar un ciclista que recorre 5/16 de dicha distancia en 1 hora para ir de una ciudad a otra?

7) En una población de 18.000 habitantes los 7/15 son personas menores de 25 años. ¿Cuántas personas son mayores de dicha edad?

8) Un ganadero tiene 600 reses, se le mueren1/16 y vende los 2/5 del resto. ¿Cuántas reses le quedan?

9) En un regalo gasté los 5/8 del dinero que tenía y me quedaron 40 Bs. ¿Cuánto dinero tenía? ¿Cuánto me costó el regalo?

10) Un hacendado cede a su hijo 3/5 de su finca para que la trabaje y venda los 3/7 del resto en Bs. 160.000 ¿Cuál es el valor de la finca si el m^2 estaba valorado en Bs. 1? ¿Cuál era la superficie de la finca?

11) Los 2/3 de los 3/5 de los 5/8 de una cantidad es 90 ¿Cuál es la cantidad?

12) Calcular un número sabiendo que si la cuarta parte de sus 2/5 se agregan los 2/5 de sus 3/8 y se restan los 3/8 de su quinta parte se obtiene 21.

13) El producto de los términos de una fracción es 52.214 y reducida a su más simple expresión da 14/3 ¿Cuál es la fracción?

14) Se vendió de la cantidad de maíz que contenía un silo; después 2/3 del resto y por último 1/5 de lo que quedaba; si sobran 3.000 Kg. ¿Qué cantidad de maíz contenía el silo?

Problemas cotidianos

1) Un obrero puede hacer cierto trabajo en 2 días y otro puede hacerlo en 3 días. ¿Qué tiempo necesitarán en hacerlo juntos?

Ejemplos del texto H: Matemática de Mendiola

Problemas pseudo-cotidianos

1) Si a la tercera parte de un número se le añaden 5 unidades, el resultado que se obtiene es el mismo número disminuido en 9 unidades. ¿De qué número se trata?

2) El doble de un número aumentado en 4 unidades es igual al triple del mismo número disminuido en 1 unidad. ¿Cuál es el número?

3) Si a un número se le suman 3 unidades y el resultado se multiplica por 2, se obtiene 3 veces el mismo número. ¿De qué número se trata?

4) A un número se le multiplica por 3 y luego se le resta 2. El resultado es – 14. ¿Cuál es el número?

5) Repartir Bs. 378 entre tres personas de modo que la segunda reciba Bs. 44 más que la primera y Bs. 47 menos que la tercera.

6) Repartir Bs. 153 entre A, B y C, de modo que A tenga la mitad de B y la tercera parte de C.

7) Juan dice a Pedro; si me das Bs. 4, los dos tendremos igual cantidad. ¿Cuánto posee cada uno si la suma de lo que tienen los dos es Bs. 58?

8) La edad de Ángel disminuida en 3 años es el doble de la de su prima Nabir disminuida en 8 años. ¿Cuántos años tiene cada primo, si la suma de sus edades es de 32 años?

9) La edad de un señor es el doble de la de su hijo, y hace 12 años era el triple. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?

10) La suma de las edades de dos hermanos es 32 años, y su diferencia 6 años. ¿Qué edad tenían hace 5 años?

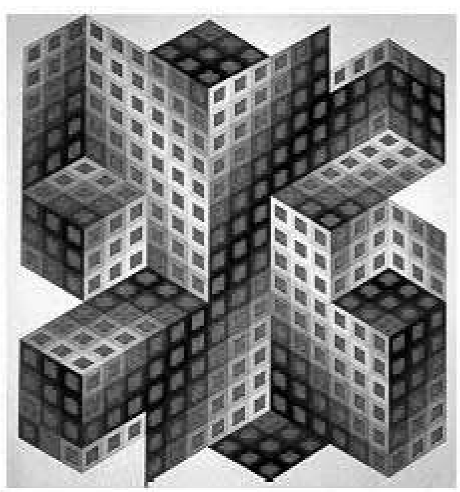
11) Si a la edad de mi hermano se le añaden 4 años, resulta el doble de su edad disminuida en 3 años. ¿Qué edad tiene mi hermano?

12) El perímetro de un rectángulo mide 28 cm y su altura 4 cm. ¿Cuánto habrá que aumentar el largo (manteniendo el ancho) para que el perímetro se duplique?

13) Un rectángulo tiene 24 cm, de perímetro y su lado mayor mide 7 cm. ¿Cuántos centímetros habrá que disminuir al lado mayor para que la figura resultante sea un cuadrado?

14) Un ángulo de un triángulo mide 30º. De los otros dos ángulos sabemos que uno es el doble del otro. ¿Cuánto mide cada uno de ellos?

15) En un triángulo, el ángulo mayor es el triple del menor, y el mediano es el doble del menor. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos?



Obra de Victor Vasarely aparecida en la portada de la revista
Communications of the ACM *magazine en septiembre de 1998*

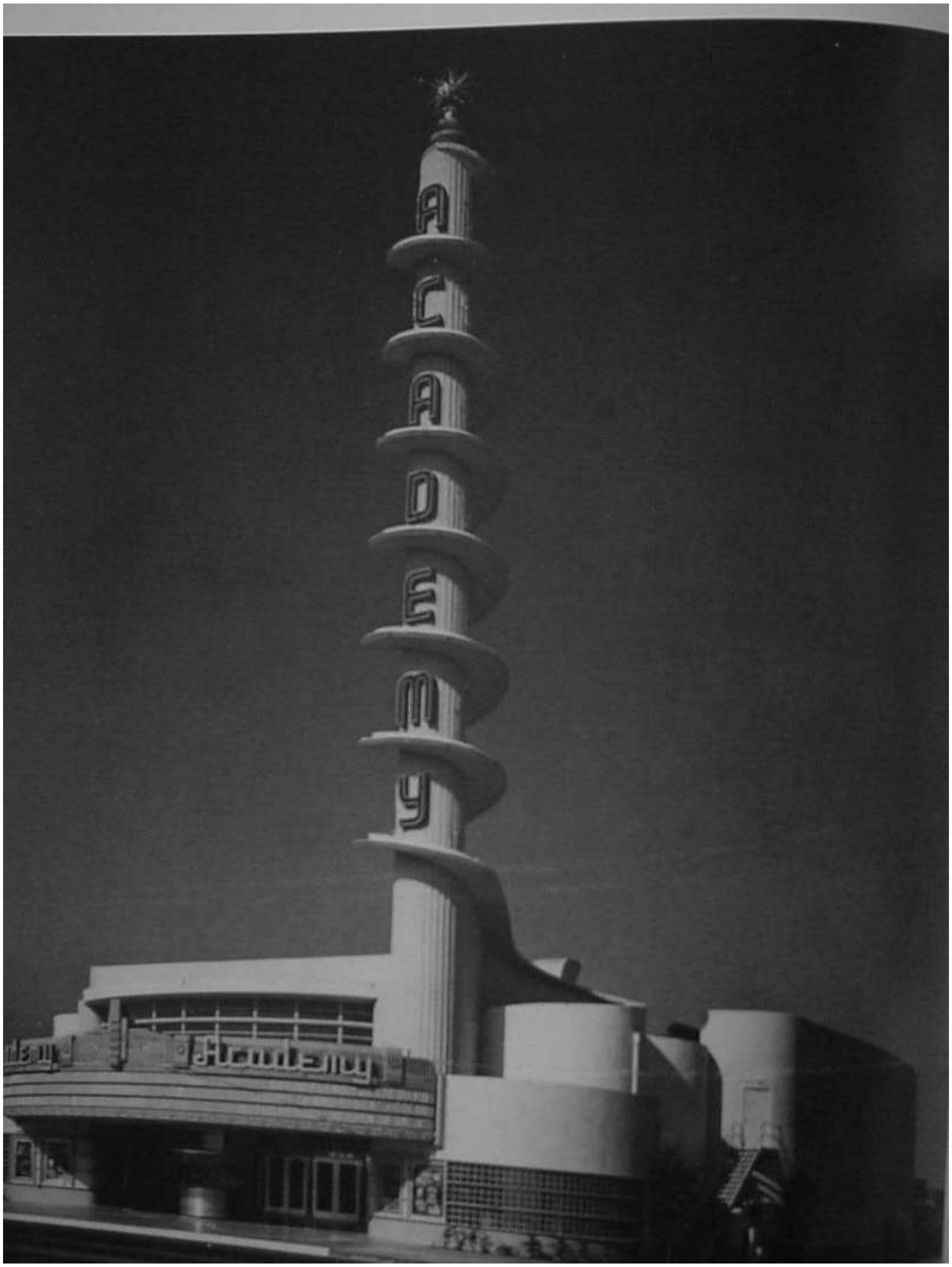
Apéndice Documental 6

Tabla 17: Los cinco principios de enseñanza y aprendizaje en una Educación Matemática Realista (Goffree, 2000)

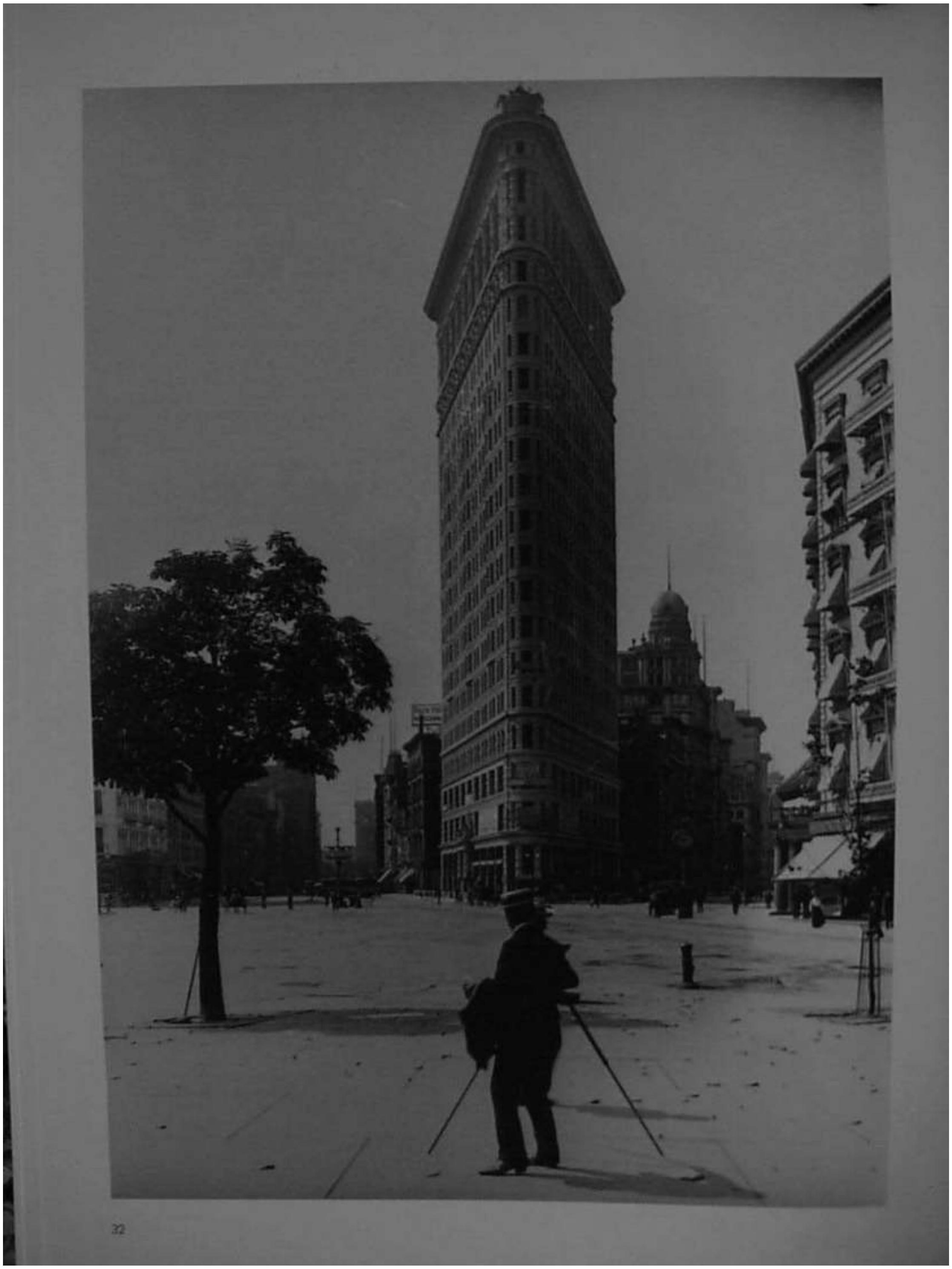
Principio	Aprendizaje	Enseñanza
1ro	**Construcción** El aprendizaje de las matemáticas es una actividad constructiva. Esto contradice la idea de que los niños simplemente absorben el conocimiento matemático que se les presenta.	**Bases concretas para la orientación** Convertir las matemáticas en algo concreto. Crear contextos reconocibles a los cuales los niños puedan asignar sus propios significados. De este modo, se crea una base concreta para orientar a los niños.
2do	**Subiendo el nivel** El aprendizaje de las matemáticas se da en algún momento situado entre las matemáticas informales de los niños (nociones intuitivas, procedimientos inventados) y las matemáticas formales de los adultos. Esto significa que el proceso de aprendizaje de cada alumno se da a diferentes niveles de formalización. Los cambios de nivel se dan a modo súbito y crean una discontinuidad en el proceso de aprendizaje.	**Modelos** Para poder conseguir el avance en los niveles durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, los alumnos deben tener a su disposición herramientas que les permitan establecer un vínculo entre las matemáticas informales y las formales. Una herramienta importante, que ha demostrado ser útil en numerosas ocasiones, es el uso de un modelo (de pensamiento). Crear un modelo de una situación o fenómeno conocido, permitir que los alumnos investiguen la situación y el modelo, conseguir que lo usen en otras situaciones y ayudarles a que lo conviertan en un modelo para solucionar problemas.
3ro	**Reflexión** El aprendizaje de las matemáticas se estimula con la reflexión. La reflexión es el motor que permite progresar, es decir, que hace avanzar de nivel (Freudenthal,1991)	**Momentos de reflexión** El maestro debe encontrar el momento oportuno para incluir la reflexión en la clase de matemáticas. Las buenas ocasiones para la reflexión incluyen cualquier conflicto cognitivo y cualquier aspecto que el alumno pueda haber pensado por sí mismo (producciones propias) (Streefland, 1991; Selter,1993)
4to	**El contexto social** Los niños aprenden más a menudo en compañía de adultos o de otros niños que no solos. Esto significa que otros actores en el proceso de aprendizaje pueden proporcionar el impulso para aprender. Los diferentes actores comparten entre sí procedimientos y conceptos matemáticos, discuten sobre ellos y generan ideas colectivamente. Se expresan diferentes opiniones y, a veces, es necesario persuadir a los demás, o por el contrario, escuchar sus argumentos.	**Lecciones de matemáticas interactivas** El maestro debe organizar la educación matemática de modo que la interacción se convierta en una parte natural de ella. Como contrapartida, se crea un clima pedagógico en el cual el alumnado puede tomar parte en la interacción. La idea de clase como una especie de comunidad matemática da una dimensión especial, al igual que la conferencia matemática en la clase que describe Selter (1993). El camino didáctico escogido y el nivel de participación del maestro pueden tomar varias formas conocidas como regímenes (Boekaert y Simona, 1993). El profesor debe ser también consciente de que la interacción social puede interrumpir el proceso de aprendizaje (Steinbring, 1997).
5to	**Estructuración** Si los niños construyen sus propias matemáticas de manera significativa, entonces las nuevas ideas y reflexiones se incorporan a las que ya se tienen. Esto significa que el conocimiento matemático disponible (por ejemplo, las estructuras cognitivas) está sujeto a constantes mejoras. El nuevo conocimiento se incorpora a las estructuras cognitivas existentes (asimilación), o la estructura total se ajusta para acomodar las nuevas ideas (acomodación). Por consiguiente, los niños aprenden matemáticas como un todo coherente y no como partes separadas. Esta capacidad de conexión funciona en dos sentidos, cubriendo tanto las relaciones entre las ideas matemáticas y el mundo real. Además, uno de los aspectos básicos del aprendizaje consiste en dar estructura a lo que se está aprendiendo	**Entretejer los hilos del aprendizaje** El maestro debe basar su enseñanza de las matemáticas en situaciones del mundo real, como fuente de ideas y como situaciones para poder aplicarlas. El primer caso sería un ejemplo de matematizaciónG horizontal; el contexto concreto que se ofrece debe ser trabajado matemáticamente por los niños. La conexión con el mundo real proporciona desde el principio significado a la actividad. Por otro lado, las ideas matemáticas que se usan pueden constituir, por ellas mismas, el tema de estudio; esto se denomina matematización vertical y permite establecer conexiones con otras ideas matemáticas, en parte, como resultado del bagaje concreto (por ejemplo, las proporciones en forma de fracciones en la introducción de los porcentajes).

Apéndice Documental 7

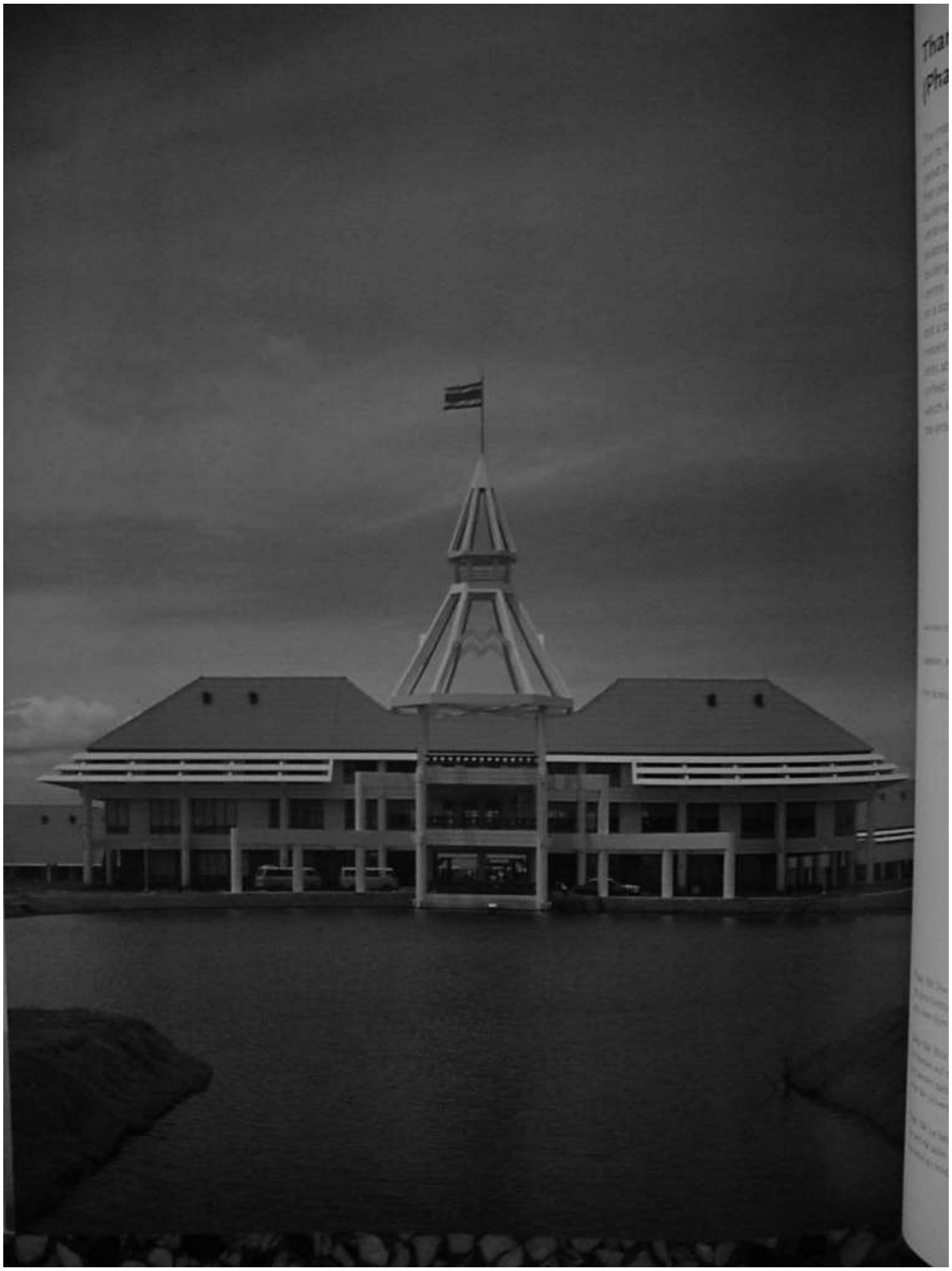
Tres paralelepípedos reales. Edificio de Phoenix-Rheinrohr AG en Dusseldorf. Foto: Arno Wrubel/HPP.



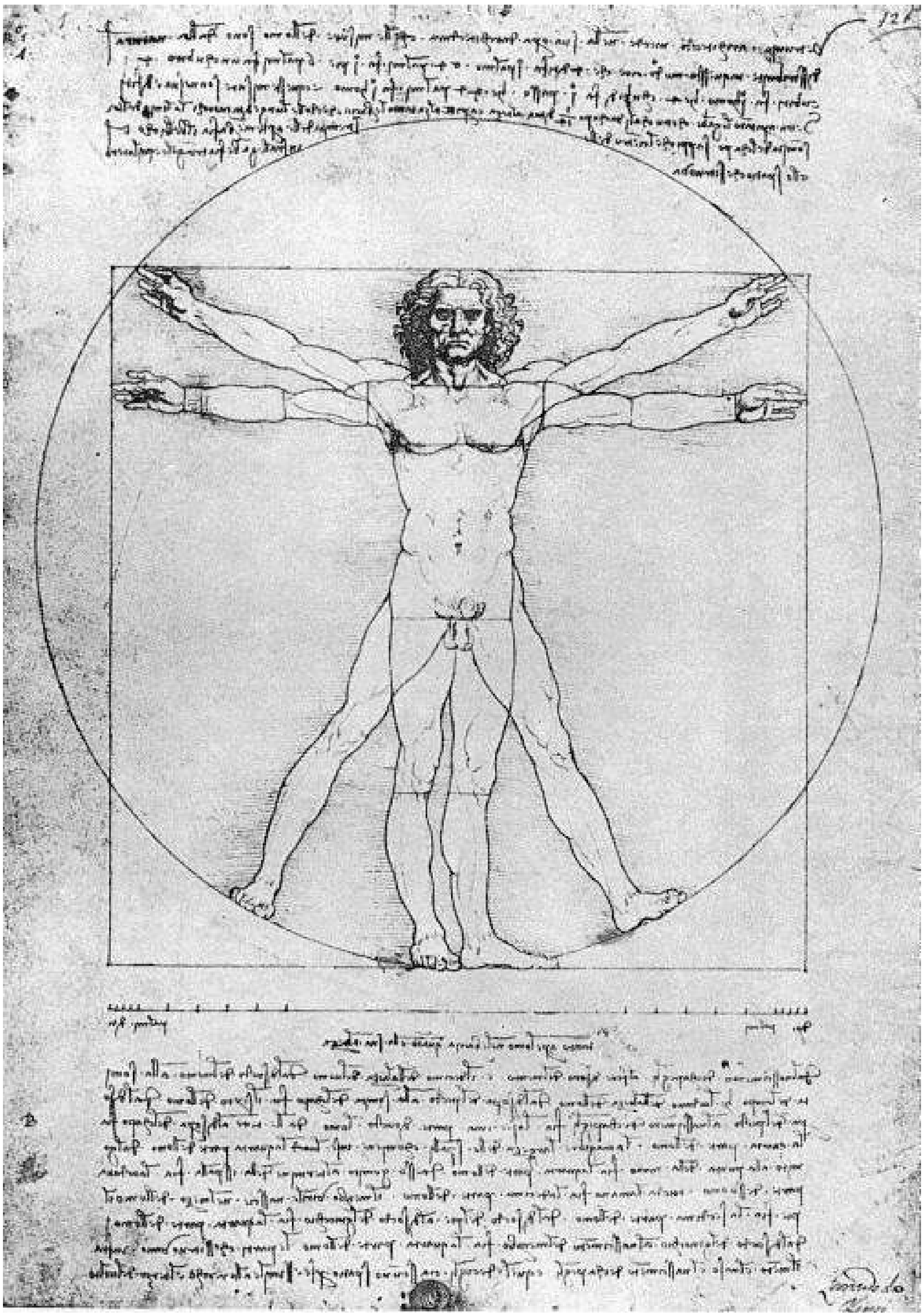
Un espiral enroscado a un cilindro. Teatro Academy en Inglewood, California. Foto: Taschen (1997)



Un prisma verdadero. Flatiron, Fuller Building en New York. Foto: Robert Blacklow/The New York Historical Society.



Simetría axial real. Thammasat University Rangsit Campus al norte de Bangkok. Foto: Taschen(1995)



Estudio del cuerpo humano de Leonardo da Vinci Fuente: www.bib.ulb.ac.be/coursmath/img/graf/gleonard.jpg

Un triángulo humano. Fuente: Archivo del Orfeón Universitario de la UCV

Apéndice Documental 8

GACETA OFICIAL
DE LA REPUBLICA DE VENEZUELA

AÑO CVIII — MES X Caracas: martes 14 de julio de 1981 Nº 2.823 Extraordinario

SUMARIO

Ministerio de Fomento

MINISTERIO DE FOMENTO

República de Venezuela. — Ministerio de Fomento. — Dirección General de Tecnología. — Servicio Nacional de Metrología. — Número 1.962. — Caracas, 30 de abril de 1981. — 171º y 122º

Este Despacho, en uso de las atribuciones que le confieren los artículos 1º, 59 y 60 de la Ley de Metrología, en concordancia con el numeral 16 del artículo 28 de la Ley Orgánica de la Administración Central,

Resuelve:

Las Unidades de medida del sistema legal venezolano son las siguientes:

CAPITULO I

Artículo 1º—Las Unidades básicas del Sistema Métrico Decimal (Sistema Internacional - S. I.), a que se refiere el artículo 1º de la Ley de Metrología son:

1. **La unidad de longitud es el metro.**
   Símbolo: m

2. **La unidad de masa es el kilogramo.**
   Símbolo: kg

3. **La unidad de tiempo es el segundo.**
   Símbolo: s

4. La unidad de intensidad de corriente eléctrica es **Ampère.**
   Símbolo: A

5. La unidad de temperatura termodinámica es el **Kelvin.**
   Símbolo: K

6. La unidad de intensidad luminosa es la candela.
   Símbolo: cd

7. La unidad de cantidad de materia es el mol.
   Símbolo: mol

CAPITULO II

Artículo 2º—Unidades Suplementarias son:

8. Angulo plano.
   La Unidad de ángulo plano es el radiante o radián.
   Símbolo: rad

9. Angulo sólido.
   La Unidad de ángulo sólido es el estereorradiante o estereorradián.
   Símbolo: sr

CAPITULO III

Artículo 3º—Las Unidades derivadas indicadas en el artículo 1º de la Ley de Metrología son:

Unidades de espacio y tiempo.

10. **Número de onda.**
    La unidad de número de onda es el uno por metro.
    Símbolo: m^{-1}

11. **Superficie.**
    La unidad de superficie es el metro cuadrado.
    Símbolo: m^2

12. **Volumen.**
    La unidad de volumen es el metro cúbico.
    Símbolo: m^3

13. **Velocidad.**
    La unidad de velocidad es el metro por segundo.
    Símbolo: m/s

14. **Aceleración.**
    La unidad de aceleración es el metro por segundo por segundo o metro por segundo cuadrado.
    Símbolo: m/s^2

15. **Velocidad angular.**
    La unidad de velocidad angular es el radiante por segundo.
    Símbolo: rad/s

16. **Aceleración angular.**
    La unidad de aceleración angular es el radiante por segundo por segundo o radiante por segundo cuadrado.
    Símbolo: rad/s^2

17. **Frecuencia.**
    La unidad de frecuencia de los fenómenos periódicos es el Hertz.
    Símbolo: Hz

18. **Frecuencia de rotación.**
    La unidad de frecuencia de rotación es el segundo recíproco.
    Símbolo: 1/s

19. **Vergencia de sistemas ópticos.**
    La unidad de vergencia de sistemas ópticos es el metro a la potencia menos uno.
    Símbolo: m^{-1}

    Esta unidad se conoce corrientemente como dioptría.
    Símbolo: δ

UNIDADES MECANICAS

20. **Masa volumétrica** (densidad absoluta).
    La unidad de masa volumétrica es el kilogramo por metro cúbico.
    Símbolo: kg/m^3

21. **Concentración de un cuerpo.**
    La unidad de concentración de un cuerpo determinado en una muestra considerada es el kilogramo por metro cúbico.
    Símbolo: kg/m^3

22. **Concentración de cantidad de materia.**
La unidad de concentración de cantidad de materia es el mol por metro cúbico.
Símbolo: mol/m³

23. **Fuerza.**
La unidad de fuerza es el Newton
Símbolo: N

24. **Momento de una fuerza.**
La unidad de momento de una fuerza es el Newton metro (newtómetro)
Símbolo: N.m

25. **Presión y tensión mecánicas.**
La unidad de presión o tensión mecánica es el Pascal.
Símbolo: Pa

26. **Tensión superficial.**
La unidad de tensión superficial es el Newton por metro.
Símbolo: N/m

27. **Trabajo-Energía.**
La unidad de trabajo y de energía es el Joule.
Símbolo: J

28. **Potencia-Flujo energético**
La unidad de potencia y de flujo energético es el Watt.
Símbolo: W

29. **Viscosidad dinámica.**
La unidad de viscosidad dinámica es el Pascal segundo.
Símbolo: Pa.s

30. **Viscosidad cinemática.**
La unidad de viscosidad cinemática es el metro cuadrado por segundo.
Símbolo: m²/s

31. **Caudal volumétrico.**
La unidad de caudal volumétrico es el metro cúbico por segundo.
Símbolo: m³/s

32. **Caudal másico.**
La unidad de caudal másico es el kilogramo por segundo.
Símbolo: kg/s

33. **Volumen másico**
La unidad de volumen másico es el metro cúbico por kilogramo.
Símbolo: m³/kg

34. **Temperatura Celsius.**
La unidad práctica de temperatura es el grado Celsius.
Símbolo: °C

35. **Cantidad de calor.**
La unidad de cantidad de calor es el Joule (concepto equivalente a la cantidad de trabajo y energía).
Símbolo: J

36. **Entropía - Capacidad térmica.**
La unidad de entropía y de capacidad térmica es el Joule por Kelvin.
Símbolo: J/K

37. **Entropía másica - Calor másico.**
La unidad de entropía másica y de calor másico es el Joule por kilogramo Kelvin.
Símbolo: J/(kg.K)

38. **Flujo térmico.**
La unidad de flujo térmico es el Watt.
Símbolo: W

39. **Densidad de flujo térmico.**
La unidad de densidad de flujo térmico es el Watt por metro cuadrado.
Símbolo: W/m²

40. **Conductividad térmica.**
La unidad de conductividad térmica es el Watt por metro Kelvin.
Símbolo: W/(m.K)

41. **Coeficiente de dilatación lineal.**
La unidad de coeficiente de dilatación lineal es el Kelvin a la potencia menos uno.
Símbolo: K^{-1}

42. **Energía másica.**
La unidad de energía másica es el Joule por kilogramo.
Símbolo: J/kg

43. **Energía volumétrica.**
La unidad de energía volumétrica es el Joule por metro cúbico.
Símbolo: J/m³

44. **Energía molar.**
La unidad de Energía molar es el Joule por mol.
Símbolo: J/mol

45. **Entropía molar - Calor molar.**
La unidad de entropía molar y de calor molar es el Joule por mol. Kelvin.
Símbolo: J/(mol.K)

UNIDADES ELECTRICAS Y MAGNETICAS

46. **Cantidad de electricidad - Carga eléctrica.**
La unidad de cantidad de electricidad y de carga eléctrica es el Coulomb.
Símbolo: C

47. **Carga eléctrica volumétrica.**
La unidad de carga eléctrica volumétrica es el Coulomb por metro cúbico.
Símbolo: C/m³

48. **Tensión eléctrica - Potencial eléctrico - Fuerza electromotriz.**
La unidad de tensión eléctrica, potencial eléctrico o fuerza electromotriz es el Volt.
Símbolo: V

49. **Campo eléctrico.**
La unidad de campo eléctrico es el Volt. por metro.
Símbolo: V/m

50. **Densidad de corriente.**
La unidad de densidad de corriente es el Ampère por metro cuadrado.
Símbolo: A/m²

51. **Resistencia eléctrica.**
La unidad de resistencia eléctrica es el Ohm.
Símbolo: Ω

52. **Conductancia eléctrica.**
La unidad de conductancia eléctrica es el Siemens
Símbolo: S

53. **Capacidad eléctrica.**
La unidad de capacidad eléctrica es el Farad.
Símbolo: F

54. **Desplazamiento eléctrico.**
La unidad de desplazamiento eléctrico es el Coulomb por metro cuadrado.
Símbolo: C/m²

55. **Permitividad - Constante dieléctrica.**
La unidad de permitividad es el Farad por metro.
Símbolo: F/m

56. Inductancia eléctrica.
La unidad de inductancia eléctrica en el Henry.
Símbolo: H

57. Flujo de inducción magnética.
La unidad de flujo de inducción magnética es el Weber.
Símbolo: Wb

58. Inducción magnética o densidad de flujo magnético.
La unidad de inducción magnética es el Tesla.
Símbolo: T

59. Fuerza magnetomotriz.
La unidad de fuerza magnetomotriz es el Ampère.
Símbolo: A

60. Campo magnético.
La unidad de campo magnético es el Ampère por metro.
Símbolo: A/m

61. Permeabilidad.
La unidad de permeabilidad es el Henry por metro.
Símbolo: H/m

UNIDADES DE RADIACION Y LUZ

62. Intensidad radiante.
La unidad de intensidad radiante es el Watt por estereorradiante.
Símbolo: W/sr

63. Flujo luminoso.
La unidad de flujo luminoso es el lumen.
Símbolo: lm

64. Iluminancia.
La unidad de iluminancia es el lux.
Símbolo: lx

65. Luminancia.
La unidad de luminancia es la candela por metro cuadrado.
Símbolo: cd/m^2

66. Radiancia.
La unidad de radiancia es el Watt por metro cuadrado estereorradiante.
Símbolo: $W/(m^2\ sr)$

UNIDADES DE RADIACIONES IONIZANTES

67. Actividad (de una fuente radioactiva).
La unidad de actividad es el 1 por segundo.
Símbolo: s^{-1}

68. Dosis absorbida.
La unidad de dosis absorbida de una radiación ionizante es el Joule por kilogramo.
Símbolo: J/kg

UNIDADES ACUSTICAS

69. Flujo de energía acústica.
La unidad de flujo de la energía acústica es el Watt.
Símbolo: W

70. Presión de radiación acústica.
La unidad de presión de radiación acústica es el Pascal.
Símbolo: Pa

71. Intensidad acústica.
La unidad de intensidad acústica es el Watt por metro cuadrado.
Símbolo: W/m^2

72. Nivel de intensidad acústica.
La unidad de nivel de intensidad acústica es el Bell.
Símbolo: B

73. Nivel de isosonía.
La unidad de nivel de isosonía es el FON.

74. Impedancia Acústica.
La unidad de impedancia acústica es el Newton-segundo por metro cúbico.
Símbolo: $N.s/m^3$

CAPITULO IV

Artículo 4º—Las unidades fuera del Sistema Internacional (S. I.), de carácter accesorio, que pueden utilizarse conjuntamente con dicho sistema, de acuerdo con el numeral 3 del artículo 1º de la Ley de Metrología, son:

75. Longitud.
Una unidad de longitud de uso en Astronomía es la Unidad Astronómica.
Símbolo: U A

76. Masa.
Una unidad de masa de uso generalizado es la Tonelada.
Símbolo: t

77. Masa atómica.
Para la masa atómica se utilizará la Unidad de Masa Atómica (unificada).
Símbolo: u

78. Tiempo.
1-a) Una unidad de tiempo es el minuto.
Símbolo: min

2-a) Una unidad de tiempo es la hora.
Símbolo: h

3-a) Una unidad de tiempo es el día.
Símbolo: d

79. Angulo plano.
1-b) Como unidad de ángulo plano se utilizará el grado sexagesimal.
Símbolo: º
Los sub-múltiplos del grado sexagesimal son:

2-b) El minuto.
Símbolo: '

3-b) El segundo.
Símbolo: "

80. Volumen.
Una unidad de volumen de uso muy generalizado es el litro, se usará como denominación especial del "decímetro cúbico".
Símbolo: l

81. Energía.
Una unidad de energía utilizada en física nuclear es el electrón - Volt.
Símbolo: ev

Artículo 5º—Las unidades de uso temporal que pueden utilizarse en ciertas actividades conjuntamente con el Sistema Internacional de Unidades (S. I.), de acuerdo con el artículo 59 y el numeral 3 del artículo 1º de la Ley de Metrología son:

82. Longitud.
1-c) Podrá utilizarse en actividades marítimas y aeronáuticas la milla marina.
2-c) En trabajos de investigación o en casos especiales podrá utilizarse el Angström.

Símbolo: Å

83. Masa.
Podrá utilizarse solamente en transacciones comerciales relacionadas con diamantes, perlas finas y piedras preciosas, el Quilate métrico.

84. **Masa volumétrica.**

Las unidades prácticas de masa volumétrica que pueden usarse en actividades industriales o de investigación son las siguientes:

1-d) El gramo por litro.
Símbolo: g/l

2-d) La tonelada por metro cúbico (múltiplo de la anterior).
Símbolo: t/m^3

3-d) El kilogramo por litro.
Símbolo: kg/l

4-d) El gramo por mililitro.
Símbolo: g/ml

85. **Pureza o tenor de los metales preciosos.**

La unidad de pureza o tenor de los metales preciosos es la milésima.
Símbolo: ‰

86. **Superficie.**

1-e) Una unidad de superficie muy utilizada en mediciones agrarias es la hectárea.
Símbolo: ha

2-e) Un sub-múltiplo de la hectárea utilizada también en mediciones agrarias pequeñas es el área.
Símbolo: a

87. **Velocidad.**

1-f) Una unidad de velocidad de uso muy generalizado es el kilómetro por hora.
Símbolo: km/h

2-f) En la navegación marítima podrá usarse como unidad de velocidad el nudo.
El nudo equivale a una milla marina (1 825 m) por hora.

88. **Frecuencia.**

Una unidad de frecuencia utilizada en telecomunicaciones es el ciclo por segundo.
Un ciclo por segundo equivale a un Hertz.

89. **Frecuencia de rotación.**

Una unidad de frecuencia de rotación utilizada en trabajos técnicos es la vuelta por minuto.
Símbolo: $1/min = min^{-1}$

La vuelta por minuto también puede considerarse como una unidad de velocidad angular.

90. **Fuerza - peso.**

1-g) Una unidad de fuerza muy generalizada es el kilogramo-fuerza.
Símbolo: kgf

2-g) Un múltiplo del kilogramo-fuerza es la tonelada-fuerza.
Símbolo: tf

3-g) La unidad de peso es el kilogramo-peso.
El "kilogramo-peso" es sinónimo de "kilogramo-fuerza".
El peso de la unidad de masa (kilogramo) es el kilogramo-peso.

91. **Momento de una fuerza.**

1-h) Una unidad de momento de una fuerza es el metro kilogramo-fuerza o kilogramo-fuerza metro llamado en la práctica kilográmetro.
Símbolo: kgf. m

2-h) Un múltiplo del kilogramo-fuerza metro es la tonelada-fuerza metro (tonelámetro).
Símbolo: tf.m

92. **Presión - Tensión mecánica.**

1-i) Una unidad práctica de presión es el kilogramo-fuerza por centímetro cuadrado.
Símbolo: kgf/cm^2

2-i) El kilogramo fuerza por centímetro cuadrado se conoce también como atmósfera técnica.
Símbolo: at
$1\ at = 1\ kgf/cm^2 \sim 98\,066{,}5\ Pascal = 98\,066{,}5\ Pa$

3-i) Otra unidad de presión utilizada en medios técnicos es la atmósfera normal llamada también atmósfera métrica.
Símbolo: atm
$1\ atm \sim 101\,325\ Pa$

4-i) Otra unidad de presión es el bar.
Símbolo: bar
$1\ bar = 100\,000\ Pa$

5-i) Los sub-múltiplos del bar más utilizados son:

a) El milibar.
Símbolo: m bar

$$1\ m\,bar = 10^{-3}\ bar = \frac{100\,000\ Pa}{1\,000} = 100\ Pa$$

b) El microbar.
Símbolo: μbar

$$1\ bar = 10^{-6}\ \mu bar = \frac{100\,000}{1\,000\,000} = 10^{-1}\ Pa$$

6-i) Un múltiplo del bar bastante utilizado es el kilobar.
Símbolo: k bar
$1\ k\,bar = 10^3\ bar \sim 10^8\ Pa$

7-i) Una unidad práctica de presión es el Torr.
Símbolo: Torr
$1\ Torr = 1\ mm\ Hg = (101\,325/760)\ Pa = 133{,}322\ Pa$

93. **Sección eficaz (física nuclear).**

Una unidad especial de sección eficaz utilizada en física nuclear es el Barn.
Símbolo: b

94. **Aceleración de la gravedad.**

Una unidad espacial de aceleración de la gravedad es el Gal.
Símbolo: Gal
$1\ Gal = 1\ cm/s^2 \sim 10^{-2}\ m/s^2$
Se utiliza en geofísica y geodesia.

95. **Energía - Trabajo.**

1-j) Una unidad de energía muy utilizada en usos eléctricos es el Watt hora.
Símbolo: Wh

2-j) Un múltiplo del Watt hora corriente utilizado es el kilowatt hora.
Símbolo: kWh

3-j) Una unidad de trabajo es el kilogramo-fuerza metro.
Símbolo: kgfm
$1\ kgfm \sim 9{,}806\,65\ N.m = 9{,}806\,65\ Joule = 9{,}806\,65\ J$

96. **Potencia.**

1-k) Una unidad de potencia utilizada es el caballo de vapor.
Símbolo: cv
$1\ cv = 735{,}5\ W$

2-k) Otra unidad de potencia utilizada es el Horse - Power.
Símbolo: HP
$1\ HP \sim 745{,}7\ W$

97. **Viscosidad dinámica.**
Una unidad de viscosidad dinámica es el Poiseuille. Su valor es el mismo de la unidad de viscosidad dinámica del Sistema Internacional - S. I.

98. **Cantidad de calor.**
1-l) Una unidad de cantidad de calor usada corrientemente es la caloría.
Símbolo: cal
1 cal = 4,1868 J

2-l) Un múltiplo muy utilizado de la caloría es la kilocaloría.
Símbolo: kcal
1 kcal = 10^3 cal = 4 186,8 J

3-l) Una unidad negativa de calor utilizada en la industria frigorífica es la frigoría.
Símbolo: fg
1 fg = — 1 kcal = — 4 186,8 J

99. **Cantidad de electricidad.**
Una unidad de cantidad de electricidad o de carga eléctrica es el Ampère hora.
Símbolo: Ah
1 Ah = 3 600 C

100. **Actividad (de una fuente radioactiva).**
Una unidad de actividad es el Curie.
Símbolo: Ci

101. **Dosis absorbida.**
Una unidad de dosis absorbida es el rad.
Símbolo: rd

102. **Dosis de exposición.**
Una unidad especial de exposición es el Roentgen.
Símbolo: R

103. **Eficacia biológica relativa.**
La eficacia biológica relativa es "el número representativo de la relación entre el efecto biológico producido por un rad de la radiación considerada y el efecto biológico producido por un rad de la radiación X".

$$E\,B\,R = \frac{\text{Efecto biológico de 1 rad de la radiación considerada.}}{\text{Efecto biológico de 1 rad de la radiación X}}$$

104. **Titulo alcoholimétrico en volumen.**
Una unidad de título alcoholimétrico en volumen es el grado alcoholimétrico centesimal.
Símbolo: °G L
El grado alcoholimétrico centesimal se puede indicar también por el símbolo: "% vol"

105. **Concentración de iones de hidrógeno.**
La unidad de concentración de iones de hidrógeno de un electrolito es el Indice de Hidrógeno.
Símbolo: pH

a) El Indice de Hidrógeno para el agua pura a O °C es: pH=7.

b) La alcalinidad queda indicada por un Indice de Hidrógeno mayor que 7: pH>7 (alcalinidad).

c) La acidez queda indicada por un Indice de Hidrógeno menor que 7: pH<7 (acidez).

CAPITULO V

Unidades de uso temporal que no pueden emplearse Conjuntamente con el Sistema Internacional — S. I

Artículo 6.—Podrán utilizarse temporalmente, pero no conjuntamente, con el Sistema Internacional S.I., las unidades siguientes:

106. **Fuerza.**
La unidad C. G. S. de fuerza es la dina.
Símbolo: dyn
1 dyn = 10^{-5}N

107. **Energía - Trabajo.**
La unidad C. G. S de energía y trabajo es el Erg.
Símbolo: erg
1 erg = 10^{-7} J

108. **Viscosidad dinámica.**
1-m) La unidad C. G. S. de viscosidad dinámica es el poise.
Símbolo: P
1 P = 1 dyn.s /cm² = 0,1 Pa s

2-m) Un submúltiplo del poise muy utilizado es el centipoise.
Símbolo: cP
1 cP = 10^{-2} P = 10^{-3} Pa s

109. **Viscosidad cinemática.**
1-n) La unidad C. G. S de viscosidad cinemática es el Stokes.
Símbolo: St
1 St = 1 cm²/s = 10^{-4} m/s

2-n) Un submúltiplo del Stokes es el centistokes.
Símbolo: cSt
1 cSt = 10^{-2} St = 1mm²/s = 10^{-6} m²/s

110. **Flujo de inducción magnética.**
La unidad C.G.S de flujo de inducción magnética es el Maxwell.
Símbolo: Mx

111. **Inducción magnética.**
La unidad C. G. S de inducción magnética es el Gauss.
Símbolo: Gs

112. **Campo magnético.**
La unidad C. G. S de campo magnético es el Oersted.
Símbolo: Oe

113. **Iluminancia.**
La unidad C. G. S. de iluminancia es el Phot.
Símbolo: ph
1 ph = 1 lumen/1 cm² = 10^4 lx

114. **Luminancia.**
La unidad C.G. S de luminancia es el stilb.
Símbolo: sb
1 sb = 1 cd/cm² = 10^4 cd/m²

CAPITULO VI
Múltiplos y Submúltiplos

Artículo 7º—Los múltiplos y submúltiplos de las unidades S.I., así como de las unidades no pertenecientes al Sistema Internacional, pero que pueden emplearse conjuntamente con aquéllas según los artículos 4º y 5º de esta Resolución, se forman anteponiéndoles nombres y símbolos de unos prefijos a los nombres de las unidades o a sus símbolos en la forma siguiente:

Prefijo	Símbolo	Factor por el cual debe ser multiplicada la unidad		
exa	E	1 000 000 000 000 000 000	=	10^{18}
peta	P	1 000 000 000 000 000	=	10^{15}
tera	T	1 000 000 000 000	=	10^{12}
giga	G	1 000 000 000	=	10^{9}
mega	M	1 000 000	=	10^{6}
kilo	k	1 000	=	10^{3}
hecto	h	100	=	10^{2}
deca	da	10	=	10^{1}
deci	d	0,1	=	10^{-1}
centi	c	0,01	=	10^{-2}
mili	m	0,001	=	10^{-3}
micro	μ	0,000 001	=	10^{-6}
nano	n	0,000 000 001	=	10^{-9}
pico	p	0,000 000 000 001	=	10^{-12}
femto	f	0,000 000 000 000 001	=	10^{-15}
atto	a	0,000 000 000 000 000 001	=	10^{-18}

CAPITULO VII

Disposiciones Generales

Artículo 8º—Los símbolos de los prefijos se imprimirán con caracteres tipográficos normales sin espacio entre el símbolo del prefijo y el símbolo de la unidad.

1 nanómetro $= 1$ nm $= 10^{-9}$ m

Artículo 9º—Si un símbolo que contenga un prefijo está afectado de un exponente, éste indica que el múltiplo o submúltiplo de la unidad está elevado a la potencia expresada por el exponente:

1 $cm^3 = 10^{-6}$ m^3
1 $cm^{-1} = 10^{2}$ m^{-1}

Artículo 10.—Se prohíbe el uso de dos o más prefijos delante del símbolo de cada unidad.

Podrá emplearse nanómetro (nm), picómetro (pm), etc., pero se prohíbe el uso de milimicrómetro, milipicómetro, etc., por cuanto los prefijos mili y micro, mili y pico, no pueden colocarse juntos delante del símbolo m de la unidad de longitud (metro).

Artículo 11.—Cuando el símbolo representativo de una unidad tenga forma de fracción (caso de las unidades derivadas) el símbolo del prefijo se colocará en el numerador de dicha fracción:

Unidad de velocidad $=$ m/s
Megámetro por segundo $=$ Mm/s $= 10^6$ m/s

Artículo 12.—Las unidades de medida, sus múltiplos y submúltiplos, sólo podrán designarse por sus nombres completos o por sus símbolos correspondientes.

Los símbolos de las unidades no admiten plural, se escribirá: 0,75m, 1m, 153m y así con todas las unidades del sistema legal.

Se prohíbe el uso de las abreviaturas distintas a los símbolos utilizados en el Sistema de medidas legal venezolano, así como la colocación del punto después del símbolo de las unidades.

Artículo 13.—Las unidades de medida que lleven nombres de sabios se consideran como nombres propios, por tanto su letra inicial será mayúscula, sin admitir plural, con el fin de honrar la memoria de dichos sabios y según acuerdo internacional.

Artículo 14.—La escritura de los números se hará utilizando las cifras arábigas y la numeración decimal, y en ella se separará la parte entera de la decimal mediante una coma (,)

268,4

Se prohíbe el uso del punto para la separación de enteros y decimales.

Artículo 15.—La parte entera de un número deberá escribirse, para su más fácil lectura, en grupos de tres cifras de derecha a izquierda separadas entre sí mediante un pequeño intervalo o espacio en blanco. La parte decimal de un número se escribirá análogamente en grupos de tres cifras pero de izquierda a derecha a partir de la coma.

a) 2 625 341
b) 1 453 687,246 31

Artículo 16.—Los números que sólo contengan una parte decimal, deben escribirse con un cero, indicativo de que no tiene parte entera, a continuación la coma y de seguidas la parte decimal.

a) 0,2

b) 0,384 675

Se prohíbe la supresión del cero y la indicación de la parte decimal colocando solamente la coma a la izquierda del número.

Artículo 17.—Para la denominación de las potencias de diez a partir del millón (10^6) se aplicará la siguiente fórmula:

$10^{6n} = (n)$ llón

En la cual n toma los valores enteros a partir de 2, y la n entre paréntesis se reemplaza por el sufijo correspondiente:

Valor de n	Nombre del sufijo	Nombre de la cantidad		Valor
$n = 2$	bi	billón	=	$10^{6.2} = 10^{12}$
$n = 3$	tri	trillón	=	$10^{6.3} = 10^{18}$
$n = 4$	cuatri	cuatrillón	=	$10^{6.4} = 10^{24}$
	etc.			

Artículo 18.—Cuando el valor numérico de una magnitud presenta parte fraccionaria, el símbolo de la unidad respectiva deberá escribirse inmediatamente a la derecha de la parte fraccionaria y no entre la parte entera y fraccionaria.

Se escribirá veinticinco gramos y medio así:

25,5 g. y no 25,g 5

Artículo 19.—Los nombres de las unidades de medida podrán utilizarse tanto si el número se escribe en letras como en cifras:

a) doce gramos
b) 12 gramos

Los símbolos de las unidades se usarán solamente cuando el número se expresa en cifras:

c) 12 g, pero no podrá escribirse: doce g

Artículo 20.—Las definiciones y equivalencias de las unidades contenidas en esta Resolución serán objeto del Reglamento de la Ley de Metrología.

Artículo 21.—Las infracciones a la presente Resolución serán sancionadas de acuerdo con lo pautado en la Ley de Metrología.

Artículo 22.—Esta Resolución entrará en vigor el día de su publicación en la GACETA OFICIAL DE LA REPUBLICA DE VENEZUELA.

Publíquese.

JOSE ENRIQUE PORRAS OMAÑA.
Ministro de Fomento

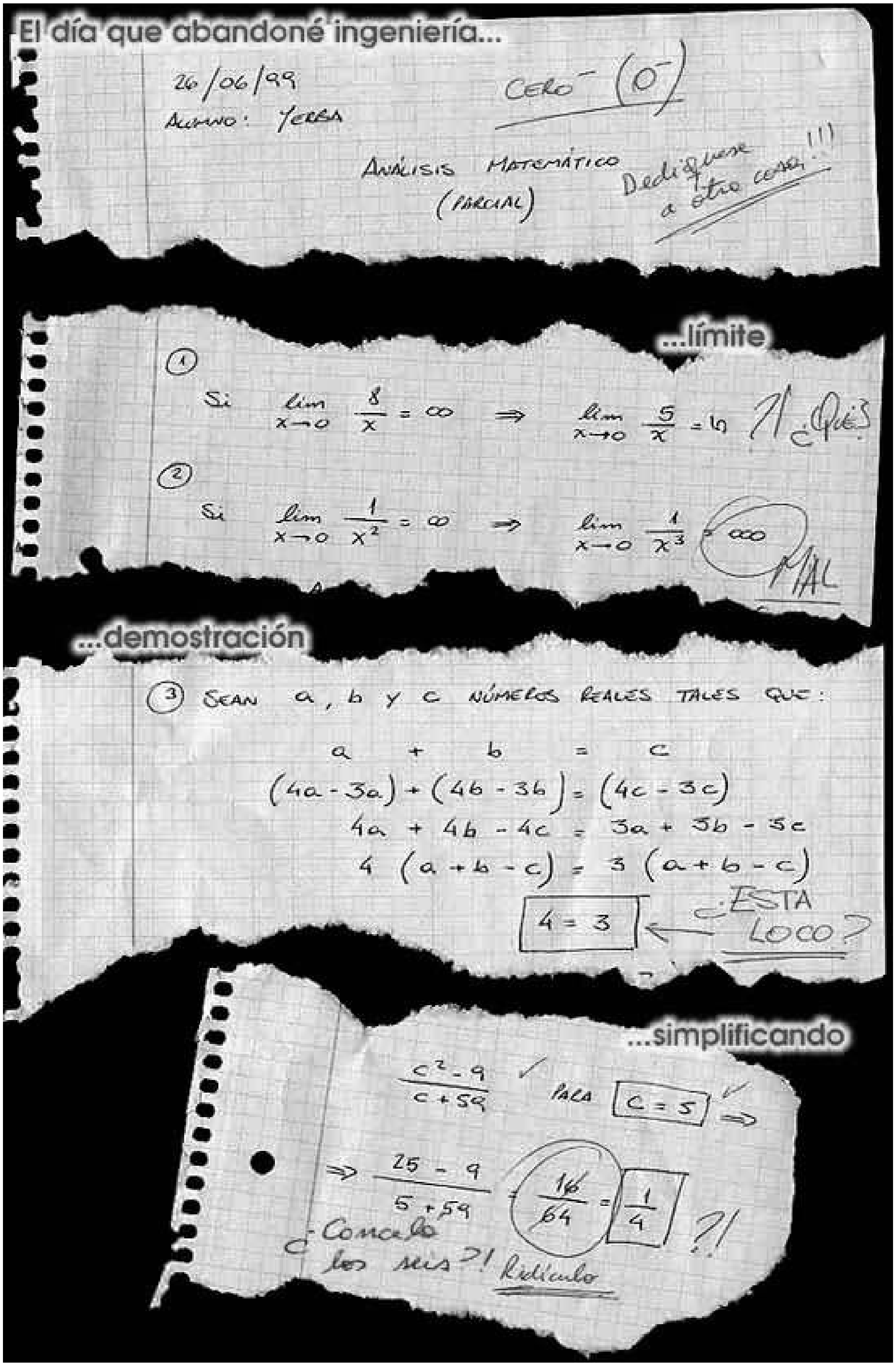
República de Venezuela — Ministerio de Fomento — Dirección General. — Número 2.165. — Caracas, 20 de mayo de 1981. — 171º y 122º

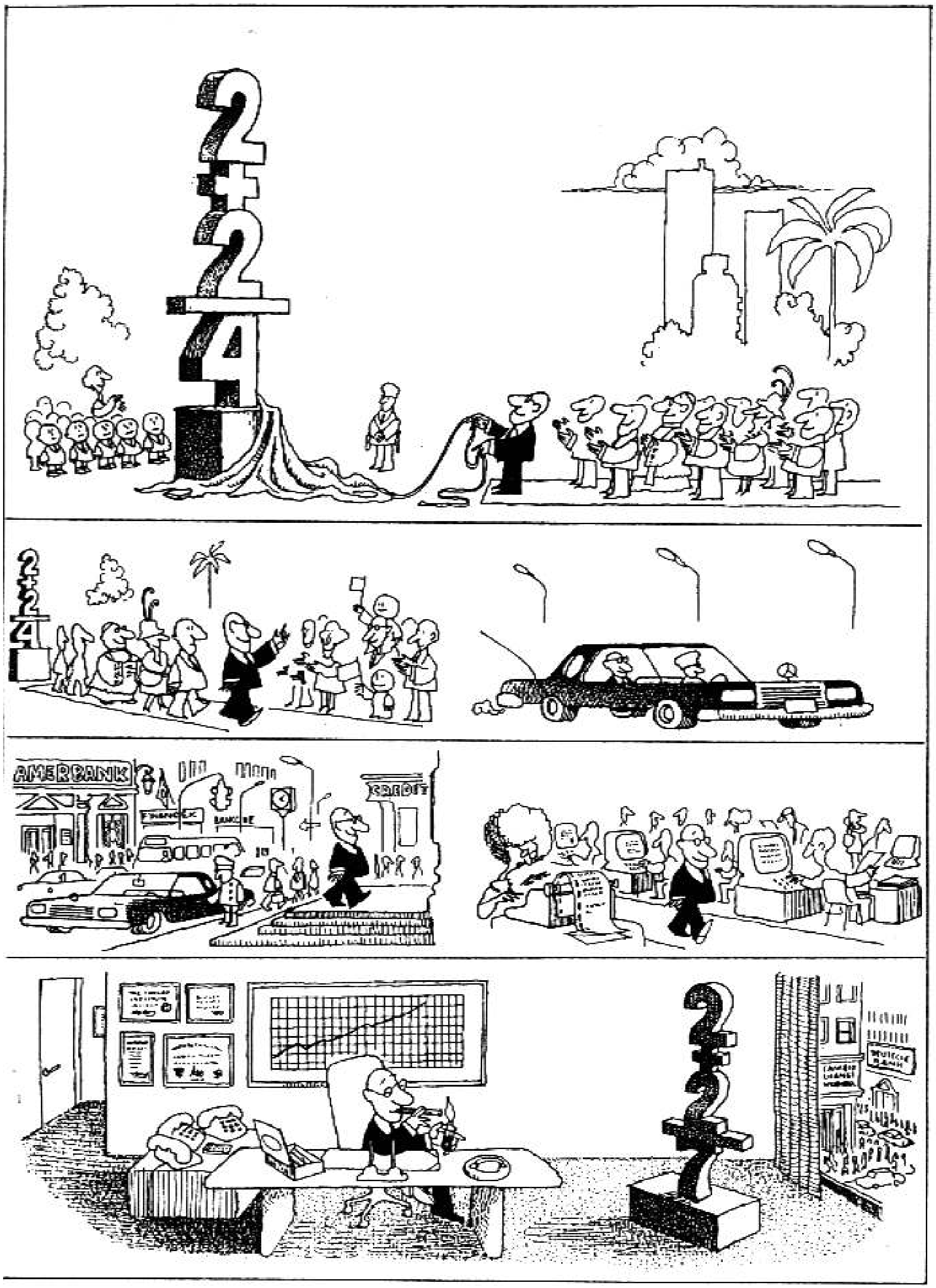
Vista la apelación interpuesta por la ciudadana Sidnina Barrueta de Pereira, representante legal del establecimiento comercial denominado "Occimor, C. A.", Sucursal Zapara, inscrito en el Registro Mercantil bajo el Nº 35, Tomo 12-A de fecha 13 de mayo de 1976, ubicado en la Avenida Bella Vista, Centro Comercial Zapara, Maracaibo, Estado Zulia, mediante la cual solicita le sea exonerada la multa por la cantidad de quince mil bolívares (Bs. 15.000,00), que le fuera impuesta por decisión emanada de la Superintendencia de Protección al Consumidor, en fecha 15 de agosto de 1980, en virtud de haber infringido los artículos 7º Ordinal 4º de la Ley de Protección al Consumidor, al hacer declaraciones falsas concernientes a la existencia de rebajas en los precios de determinados productos y el aparte único del artículo 4º del Reglamento Parcial Nº 2 de la mencionada Ley, al colocar para la venta productos sin su precio máximo de venta al público, al respecto se observa:

Por cuanto el recurrente no ha presentado alegatos suficientes para desvirtuar lo actuado.

Por cuanto en el folio veinte y uno del expediente en curso el representante de la empresa admite que existían colocados para la venta productos sin su precio máximo de venta.

Apéndice Documental 9





Quino Fuente: Potentes prepotentes e impotentes, pag 94

Quino Rompiendo paradigmas.Fuente: Potentes prepotentes e impotentes, pag 33

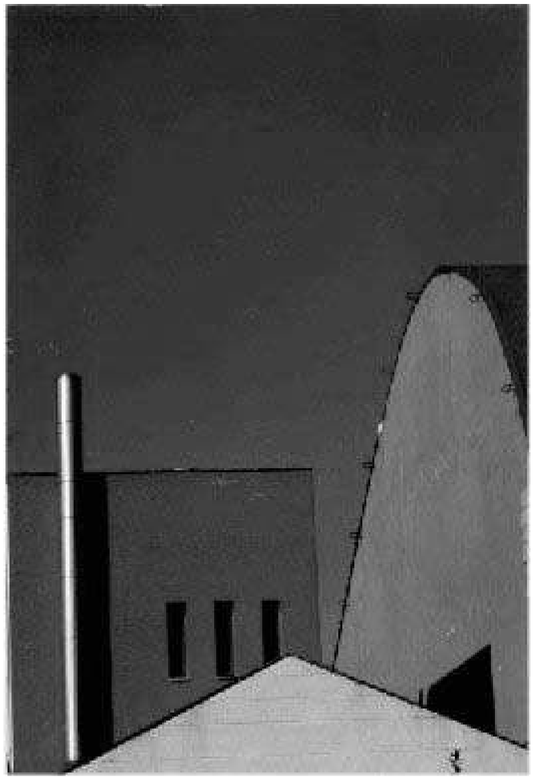
Quino Fuente: Potentes prepotentes e impotentes, pag 20

Apéndice Documental 10

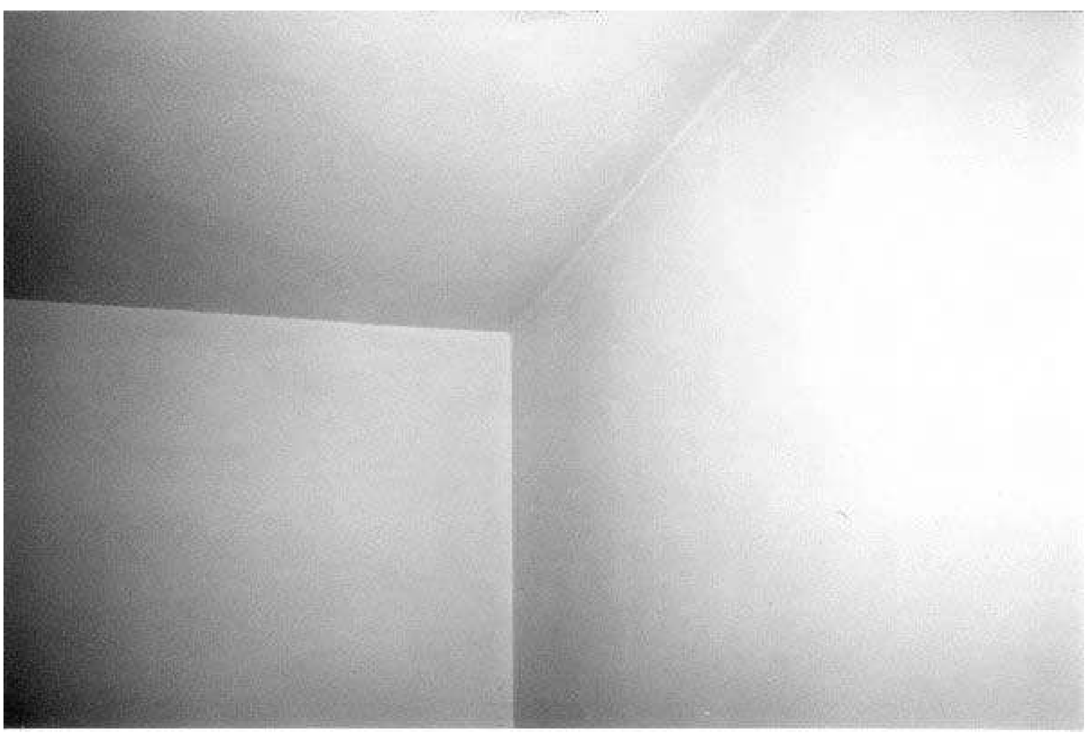
Fotografias ganadoras del Concurso-Exposición de Fotografía Matemática del IES Carreño Miranda de Avilés, España.
Fuente: http://platea.pntic.mec.es/~amateo1/foto.html#lista
y las tres últimas fotos de la Fundación COM-PARTIDA de matemática de Uruguay. Fuente: http://www.sectormatematica.cl/fotos.htm

¿Qué nos cuentas? "Función seno en el tejado"

Jorge Muñiz Álvarez "O.G.N.I. Objeto Geométrico no identificado"

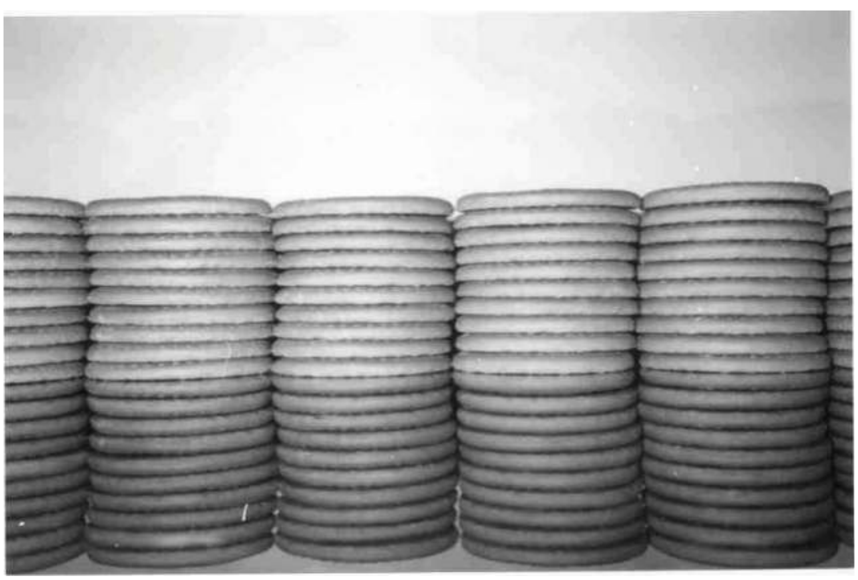


Miguel Olmedo Esteban “Composición Geométrica”



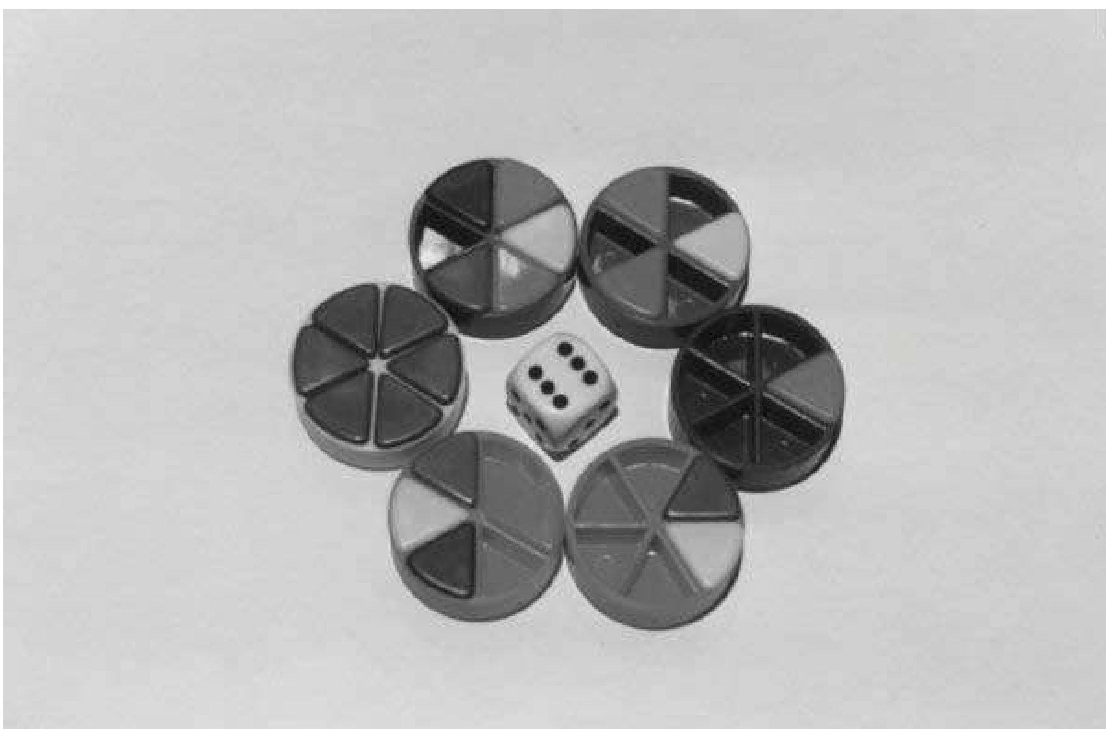
Lidia Aguado Manteca “Esquina Rango = 3”

Pablo Iglesias Rionda “Paralelas y Secantes en el Plano”

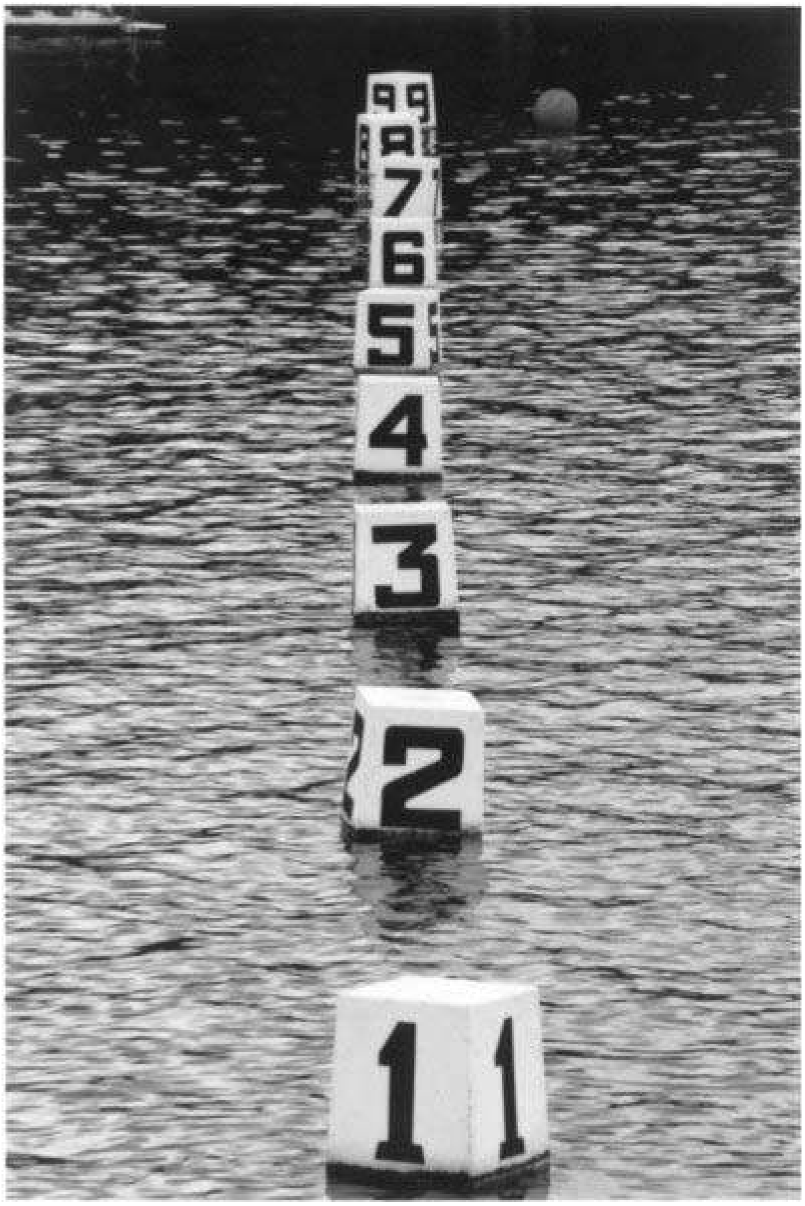


Susana Cascón García “2x1 PUBLICIDAD ENGAÑOSA (la simetría no se come)”

Pablo Iglesias Rionda "Campana de Gauss"



Omayra Rodríguez Irimia "Son fracciones trivialmente"

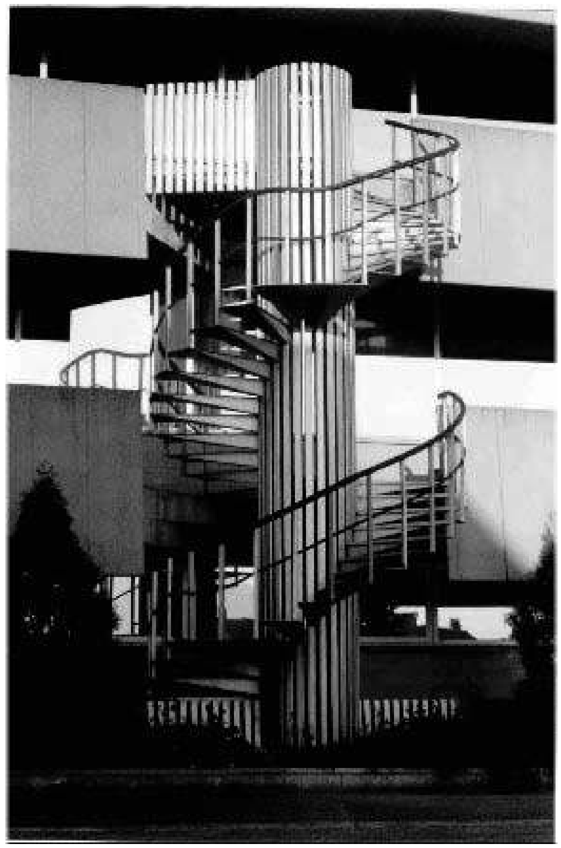

Mario Durán Acevedo “Pitágoras en el agua”

Borja Aparicio Cotarelo “Funciones por los pasillos”

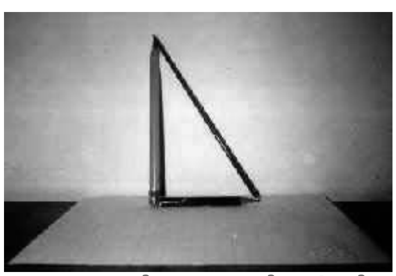
Aaron García López-Lago “Geometría de Domingo”

Miguel Olmedo Esteban “Ruedas gastronómicas”

Omayra Rodríguez Irimia “Histograma de CDS”



Sonia López Jiménez "Espiral"



Palo chino^2 = lapicera^2 + lápiz^2

Parábola hídrica

Simetría Amazónica

Referencias Bibliográficas

Adda, J. (1976). Erreurs provoquees par les representations. En *Cieaem* 39. [329-335]. París, Francia: Université París.

Aguilar, J. (1989). *El diseño de instrucción en la planificación de la enseñanza.* (Mimeografiado). Caracas, Venezuela: Universidad Simón Bolívar.

Alsina, A., Callis, J. y Figueras, E. (1997). Matemáticas para vivir y conocer. Enfoque y propuestas para primaria. *Aula de Innovación Educativa*, [63: 28].

Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO.* Madrid, España: Síntesis.

Álvarez, F. (1974). El formalismo lógico en la reforma educativa. *Revista de Pedagogía.* 5: 64-72. Caracas, Venezuela: Universidad Central de Venezuela.

Álvarez, Y. (1996). Cómo estudiar Matemáticas. *Sidetur en la comunidad*. Año 5, Nº 70. Caracas, Venezuela: Siderúrgica del Turbio.

Andonegui, M. (1992). *Aportes a un marco teórico para el análisis de errores en el aprendizaje de la Matemática.* Ponencia presentada en el II Encuentro de Profesores de Matemática de la Regiones Nororiental, Insular y Guayana, Maturín. (Mimeografiado). Barquisimeto, Venezuela: Instituto Pedagógico de Barquisimeto de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador

Antunes, C. (1999). *Manual de técnicas de dinámica de grupos de sensibilización y lúdico-pedagógicas.* Buenos Aires, Argentina: Lumen.

Arias, F. (1997). *El proyecto de investigación. Guía para su elaboración.* Caracas, Venezuela: Episteme.

Ausubel, D. (1976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México, México: Trillas.

Avendaño, M. y Cáceres, J. (1999). *Propuesta para la formación docente en los Proyectos Pedagógicos de Aula desde una perspectiva transformadora.* Barquisimeto, Venezuela: Universidad Central de Venezuela.

Ayuso, E., Banet, E. y Abellán, T. (1996). *Introducción a la genética en la enseñanza secundaria y bachillerato: II. ¿Resolución de problemas o realización de ejercicios?* Enseñanza de la ciencia, 14: [127-142].

Azcárate, P. (1997). ¿Qué matemáticas necesitamos para comprender el mundo actual? *Investigación en la Escuela*, 32: [77-85]. Sevilla, España: Diada.

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. (1994). *La naturaleza de la matemática y su influencia, problema fundamental de la didáctica de la Matemática.* Investigación en la Escuela. 24: [79-88].

Barba, D. y Segarra, L. (1992). Problemas sin problemas. *Cuadernos de pedagogía*. 202: [8-9]. Barcelona, España: Fontalba.

Balestrini, M. (1998). *Cómo se elabora el proyecto de investigación.* Caracas, Venezuela: BL Consultores Asociados.

Bates, R. (1986). *The menagement of culture and knowledge.* Victoria, Australia: Deakin University Press.

Beach, K. (1992). *The role of leading and non-leading activities in transforming Arithmetic between achool and work.* Paper presentado en el Annual meeting of American Educational Research.

Beaudot, A. (1980). *La creatividad*. Madrid, España: Narcea.

Bell, E. (1937). *Men of Mathematics.* Londres, Inglaterra: Simon and Schuster.

Bell, M. (1970). *Historia de las Matemáticas.* Madrid, España: Diana.

Berini, M. (1997). Las matemáticas y la Realidad. La utilización del entorno como recurso didáctico. *Uno*.12: [17-28].

Bernal, J. (1979). *Historia social de la ciencia.* Barcelona, España: Península.

Beyer, W. (2000). La resolución de problemas en la primera etapa de Educación Básica y su implementación en el aula. *Enseñanza de la Matemática.* 9(1): [22-30].

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona, España: Paidós.

Bisquerra, R. (1996). *Métodos de investigación educativa.* Barcelona, España: Ceac.

Blanco, N. (1996). ¿Qué conocimiento para qué escuela? *Kikirikí*, 39: [12-17].

Blum, W. (Eds.) (1993). Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht: Beiträge aus dem ISTRON-Wettbewerb. Hildesheim. Blum, W. (Ed.) (1993) *Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht. Beiträge aus dem ISTRON-Wettbewerb*. Hildesheim, Alemania: Franzbecker.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to Other Subjects - State, Trends Issues in Mathematics.

Enstruction. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, Dordrecht, Holanda, [37-68].

Boggino, N. (1996). *Globalización, redes y transversalidad de los contenidos en el aula*. Rosario, Argentina: Homo Sapiens.

Bolt, B. y Hobbs, D. (1991).*101 proyectos matemáticos*. Barcelona, España: Labor.

Borasi, R. (1986). Algebraic Explorations of the error $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$. *Mathematics Teachers*. [246-248].

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de Historia de la Matemática*. Barcelona, España: Alianza.

Breijo, B. y Domínguez, P. (1998). *Matemática Constructiva 7mo grado.* Caracas, Venezuela: Triángulo.

Breijo, B. y Domínguez, P. (1998). *Matemática Constructiva 8vo grado*. Caracas, Venezuela: Triángulo.

Briones, M. (1995). *Aprendizaje significativo. Dossier de materiales analizados.* Barquisimeto, Venezuela: Grupo de Capacitación Lara.

Brousseau, G., Davis, R. y Werner, T. (1986). Observing studens at work. En Christiansen, B., Howson, G. y Otte, M. (Eds). *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht, Holanda: Reidel.

Brown, J., Collins, A. y Duguid, P. (1989). *Situated cognition and the culture of learning.* Educational Researcher, 18: [32-42].

Brown, J.S. y Van Lehn, K. (1980). Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science*. 4: [379-426].

Bruner, J. (1963). *El proceso de la educación.* México, México: Uteha.

Bruner, J. (1972). *Hacia una teoría de la instrucción.* México, México: Uteha.

Bruner, J. (1980). *Investigaciones sobre el desarrollo cognitivo.* Madrid, España: Pablo del Río.

Bruner, J. (1987). *La importancia de la educación.* Barcelona, España: Paidós

Bruner, J. y Haste, H. (1990). *La elaboración del sentido: la construcción del mundo por los niños.* Barcelona, España: Paidós

Callejo, M. (1992). Resolución de problemas. *Cuadernos de pedagogía*. 202: [26-30]. Barcelona, España: Fontalba.

Callejo, M. (1994). Un club matemático para diversidad. *Cuadernos de Pedagogía*. Nº 218. Madrid, España: Narcea.

Carear, T., Carear, D. y Schliemann, A. (1991). *En la vida diez en la escuela cero.* Barcelona, España: Siglo XXI.

Castro, E., Rico, L. y Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las ciencias.* Vol 10. Nro 3: [243-253]. Barcelona, España: Instituto de Ciencias de la Investigación de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Clark, C. y Yinger, R. (1979). Teacher's thinking. En Stodolsky, S. (1991). *La importancia del contenido en la enseñanza. Actividades en las clases de matemáticas y ciencias sociales.* Barcelona, España: Paidós.

Comap. (1998). *Las matemáticas en la vida cotidiana.* Madrid, España: Addison-Wesley.

Carbal, F. (1992). ¡Que divertido es pensar! *Cuadernos de pedagogía*. 202: [10-12]. Barcelona, España: Fontalba.

Cockroft. W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid, España: MEC. [51-161]

Coll, C., Gabucio, F., Rodrigo, M. y Arnay, J. (1997). *La construcción del conocimiento escolar.* Barcelona, España: Paidós

Corbalán, F. (1997). Matemáticas de la vida cotidiana. *Aula de Innovación Educativa*, 63: [23-27].

D'Ambrosio, U. (1980). Estrategias para establecer una mayor relación entre las matemáticas y las otras ciencias. *Curriculum*. 9:25-38. Caracas, Venezuela: Consejo Directivo.

D'Ambrosio, U. (1985). Environmental Influences. *Mathematical Education*. 4: 22-46. París, Francia: UNESCO.

D'Ambrosio, U. (1994). Ethnomathematics the nature of mathematics and mathematics education. En Ernest, P. (Ed). *Mathematics Education and Philosophy: An International Perspective.* Londres, Inglaterra: Falmer Press.

Damerow, P. (1986) (Ed.). *Mathematics for all. Problems of cultural selectivity and unequal distribution of mathematical education and future perspectives on mathematics teaching for the majority.* París, Francia: Unesco.

Dávila, M. y Losada, M. (1997). **Las matemáticas en la publicidad**. Cuadernos de Pedagogía. 262: 32-35. Barcelona, España: Praxis.

Davydov, V. (1995). The influence of L.S. Vigotsky on education theory, research and practice. *Educational Researcher*, vol. 24 (3): [12-21].

Davydov, V. (1999). The content and unsolved problems of activity theory. En Engeström Y., Miettinen R. Y Punamäki R. (Eds.). *Perspectivas on Activity Theory*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Davydov, V. y Radzikhovskii, L. (1981). Methodological problems in the Psychology Analysis of activity. En Wertsch J. (Ed.) *Culture, communication and cognition*. 35-37. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

De Abreu, G. (1997). Matemáticas campesinas. *Acción Pedagógica*. Vol 6. Nro 1 y 2: 53-58. San Cristóbal, Venezuela: Universidad de Los Andes.

Decroly, O. (1950). *Iniciación general al método Decroly y ensayo de aplicación a la escuela primaria.* Buenos Aires, Argentina: Losada.

De Lange Jzn, J. (1989). La educación realista de las matemáticas. *Studia Pædagogica*. Nro 21. Salamanca, España: Universidad de Salamanca.

Dewey, J. (1916). *Essay in Experimental Logic.* Nueva York, Estados Unidos: Dover Publications.

Dewey, J. (1922). *Naturaleza humana y conducta*. México: Fondo de Cultura Económica.

Díaz González, A. (1986). *Introducción a las técnicas de investigación pedagógica.* México, México: Kapelusz Mexicana.

Dieudonné, J. (1970). *The work of Nicholas Bourbaki.* American Mathematical Monthly, 77, 134-145.

Duckworth, E. (2000). *Cuando surgen ideas maravillosas y otros ensayos sobre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona, España: Gedisa.

Durkheim, E. (1975). *Educación y Sociología*. Barcelona, España: Península.

Einstein, A. (1980). *Mi visión del mundo.* Barcelona, España: Tusquets.

Engeström, Y. (1999). **Activity theory and individual and social transformations**. En Engeström Y., Miettinen R. Y Punamäki R. (Eds.). Perspectivas on Activity Theory.19-38. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Engeström, Y. y Miettinen, R. (1999). Introducción. En Engeström Y., Miettinen R. Y Punamäki R. (Eds.). *Perspectivas on Activity Theory.* 1-18. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Ernest, P. (1994). *Variedades de constructivismo: sus metáforas, epistemologías e implicaciones pedagógicas.* Hiroshima Journal of Mathematics Education. 2:1-14.

Escudero, J. (1981). *Modelos didácticos. Planificación sistemática y autogestión educativa.* Barcelona, España: Oikos-tau.

Eskola, A. (1999). *Laws, logics and human activity.* En Engeström Y., Miettinen R. Y Punamäki R. (Eds.). Perspectivas on Activity Theory. 107-114. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Fals Borda, O. (1992). *La ciencia y el pueblo: nuevas reflexiones en la investigación- acción participativa*. Bogotá, Colombia: Editorial Popular.

Fernández, C., Yoshida, M y Stigler, J. (1992). *Learning Mathematics from classroom instruction: on relating lessons to pupils`interpretations.* Journal of the Learning Sciences, 2,333-365.

Fiol, M. y Fortuny, J. (1990). *Circulando por el círculo*. Madrid, España: Síntesis.

Franke, M. (1996). Offener Mathematikunterricht in einer altersgemischten Gruppen. En: GSZ 104/1997, pp. 15-18.

Freire, P. (1973). *Pedagogía del oprimido*. Madrid, España: Siglo XXI.

Freire, P. (1979). *Política y educación*. México, México: Siglo XXI.

Freire, P. (1996). *Pedagogía de la autonomía.* Madrid, España: Paidós.

Freudenthal, H. (1967). *Las matemáticas en la vida cotidiana.* Madrid, España: Guadarrama.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, Holanda: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures.* Dordrecht, Holanda: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* Dordrecht, Holanda: Reidel.

Gagné, E. (1991). *La psicología cognitiva del aprendizaje escolar.* Madrid, España: Visor.

Gagné, R. (1975). *Principios básicos del aprendizaje para la instrucción.* México, México: Diana.

Gagné, R. (1979). *Las condiciones del aprendizaje.* Caracas, Venezuela: Interamericana.

García, E. (1994). *El conocimiento escolar como un proceso evolutivo: aplicación al conocimiento de nociones ecológicas.* Investigación en la Escuela, 23: [65-76].

García, G. y Camargo, L. (1996). *Errores en álgebra, un estudio exploratorio en estudiantes del primer semestre de universidad.* Educación y cultura. 40: [53-57]. Bogotá: FECODE.

Garciadiego, A. (1997). Y…las matemáticas ¿para qué nos sirven? *Acta Universitaria*. Vol 7. Nro 7: 3-14. Guanajuato, México: Universidad de Guanajuato.

García Márquez, G. (1996). Por un país al alcance de los niños. En *Colombia: al filo de la oportunidad. Misión Ciencia, Educación y Desarrollo. Tomo I.* Santafé de Bogotá, Colombia: Presidencia de la República, Consejería presidencial para el desarrollo institucional, Colciencias y Tercer mundo editores.

Gardner, M. (1977). *Festival mágico-matemático.* Barcelona, España: Alianza.

Gasking, D. (1969). La matemática y el mundo. En Newman (Ed). *Matemática, verdad, realidad.* Barcelona, España: Grijalbo.

Gil-Pérez, D. (1990). *Un modelo de resolución de problemas como investigación.* Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia-Labor.

Giménez, J. (2000). ¿Construir o no construir? Esa es la cuestión. *Uno*. 25: [5-8]

Giménez, J., Fortuny, J. y Alsina, C. (1995). Educación matemática y entorno medioambiental. *Uno*, 6: [113-126].

Good, T. y Brophy, J. (1996). **Psicología Educativa Contemporánea**. México, México: McGraw-Hill.

Gorgorió, N., Deulofeu, J., Bishop, A., de Abreu, G., Balacheff, N., Clements, K., Dreyfus, T., Goffree, F., P., Nesher, P. y Ruthven, K. (2000). *Matemáticas y*

Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional. Barcelona, España: Graó.

Gorman, P. (1979). *Phythagoras: A life.* Cambridge, Inglaterra: Routledge and Kegan Paul.

Gössel, P. y Leuthäuser, G. (1997). *Arquitectura del Siglo XX.* Colonia, Alemania: Benedikt Taschen.

Grupo Arzaquiel. (1991). La proporcionalidad, un tema polivalente. *Cuadernos de pedagogía.* 194: [98-99]. Barcelona, España: Fontalba.

Gutiérrez, J., Pintado, B. y Pozo, T. (1990). Matemáticas en el campo. *Cuadernos de Pedagogía.* 187: [53-55]. Barcelona, España: Fontalba.

Harmos, P. (1980). The hearth of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*. 87(7): [519-524].

Hasan-Uddin Khan. (1995). *Contemporary Asian Architects.* Colonia, Alemania: Benedikt Taschen.

Heath, T. (1981). *A History of Greek Mathematics, vol. 1 y 2.* Londres, Inglaterra: Dover.

Hernández, F. (1992a). Las tiendas de matemáticas. *Cuadernos de pedagogía*.200: 32-33. Barcelona, España: Fontalba.

Hernández, F. (1992b). A vueltas con la globalización. *Cuadernos de pedagogía*, 202:64-66.

Hernández, F. (1996). Buscando la complejidad en el conocimiento escolar. *Kikirikí*, 39:32-38.

Hernández Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (1991). *Metodología de la* Investigación. Caracas, Venezuela: Mc Graw-Hill.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim y Basel, Alemania: Beltz Verlag.

Hitt, F. (1996). *Investigaciones en matemática educativa.* México, México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Howson, G. (1979). Análisis crítico del desarrollo curricular en Educación Matemática. En Rico Romero, L. (1997b). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria.* Madrid, España: Síntesis.

Ianni, N. (1998). *La convivencia en la escuela: un hecho, una modalidad diferente en el campo de la prevención.* Buenos Aires, Argentina: Piados.

Jordán, J. y Bennett, N. (1979). *Estilos de enseñanza y progreso de los alumnos.* Madrid, España: Morata.

Kaiser-Messmer, G. (1986). Anwendungen im Mathematikunterricht. Vol. 1, Theoretische Konzeption. Bad Salzdetfurth.

Kaiser-Messmer, G. (1997). Vergleichende Untersuchungen zum Mathematikunterricht im englischen und deutschen Schulwesen. En: *Journal für Mathematik-Didaktik* 18(2/3), [127-170].

Kaiser-Messmer, G. (1999). Unterrichtswirklichkeit in England und Deutschland. Vergleichende Untersuchngen am Beispiel des Mathematikunterrichts. Weinheim: Beltz Verlag.

Keitel, C. (1985). *Mathematik für alle - ein Ziel; was sind die Ziele einer. Mathematik für alle".* ZDM. Año 17. Nº 6. Karlsruhe. [177 - 186].

Keitel, C. (1989). Mathematics education and technology. *For the Learning of Mathematics*, 9(1): [103-120].

Kemp, J. (1972). *Planeamiento didáctico.* México, México: Diana.

Kilpatrick, W. (1967). *Función social, cultural y docente de la escuela.* Buenos Aires, Argentina: Losada

Kilpatrick, W. (1968). *Filosofía de la educación.* Buenos Aires, Argentina: Losada

Kilpatrick, J. (1994). *Educación matemática e investigación.* Madrid, España: Síntesis

Kilpatrick, J. (1982). ¿Qué es un problema? *Solución de problemas*, 4 (2).

Kindt, M. (1993). *Enfoque realista de la educación matemática. Aspectos Didácticos de las Matemáticas.* 4. Zaragoza, España: Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza.

Klimovsky, G. (2001). *Las desventuras del conocimiento científico*. Buenos Aires, Argentina: AZ Editora.

Knijnik, G. (1997). ¿Dónde voy a hacer la compra? Educación matemática y otras preguntas. *Educación Matemática*. Vol. 9. 1: 70-75.

Lacasa, P. (1994). *Aprender en la escuela aprender en la calle.* Madrid, España: Visor.

Lacueva, A. (2003). Presentación. *Revista de Pedagogía.* Mayo. Vol. 24. N° 70. [179-180].

Lampert, M. (1989). *Choosing and using mathematical tools in classroom discourse.* En Brophy, J. (Ed). *Advances in research on teaching*. Vol. 1, Teaching for meaningful understanding and self-regulated learning. Greenwich, Inglaterra: Jal.

Lanz, C. (1997). *El proceso educativo transformador.* Maracay, Venezuela: Invedecor

Lappan, G. y Ferrini-Mundy, J. (1993). Knowing and doing mathematics: A new vision for middle grades students. *Elementary School Journal*, 93: [625-641].

Larousse. (1984). *Pequeño Larousse Ilustrado.* París, Francia: Autor.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Lave, J. (1991a). *La cognición en la práctica.* Madrid, España: Paidós.

Lave, J. (1991b). Situating learning in communities of practice. En Resnick L., Levione J. Y Teasley S. (Eds.). *Perspectives on socially shared cognition*. [63-81]. Washington, Estados Unidos: American Psychological Association.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated Learning*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Lektorsky, V. (1999). Activity theory in a new era. En Engeström Y., Miettinen R. Y Punamäki R. (Eds.). *Perspectivas on Activity Theory.* Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Leontiev, A. (1981). The problem of activity in Psychology. En Wertsch, V (Ed.). *Concept Activity in Soviet Psychology*. [37-71]. Armonk, Estados Unidos: Sharpe.

Lladó, C. (1997). Una educación matemática enraizada en la historia de la cultura. *Uno*,12: [37-48].

Luria, A. (1977). *Introducción evolucionista a la psicología.* Barcelona, España: Fontanella.

Mancera, E. (1998). *Errar es un placer.* México, México: Iberoamericana.

Manning, M., Manning, G. y Long, R.(2000). *Inmersión temática. El currículo basado en la indagación para los primeros años y años intermedios.* Barcelona, España: Gedisa

Maradey, D. (1999). *Matemática 7mo grado.* Caracas, Venezuela: Distribuidora Escolar.

Martínez, M. (1993). *El paradigma emergente. Hacia una nueva teoría de la racionalidad científica.* Barcelona, España: Gedisa.

Matz, M. (1982). Hacia un modelo de proceso para los errores del álgebra de la High School secundaria. En D. Sleeman y J.S. Brown. (Eds). *Sistemas inteligentes del curso particular.* Nueva Cork, Estados Unidos: Academy Press.

Mayobre, A. (1994). *Diseño de estrategias metodológicas para la enseñanza de la matemática en la educación básica siguiendo los planteamientos de la participación constructiva.* Memorias de las Primeras jornadas de Investigación. Caracas, Venezuela: Colegio Universitario Francisco de Miranda.

Meadows, D., Meadows, L. y Panders, L. (1992). *Beyond the Limits*. Londres, Inglaterra: Earthscan.

Meira, L. (2000). Lo real, lo cotidiano y el contexto en la enseñanza de las matemáticas. *Uno*. 25: 59-76

Mellin-Olsen, S. (1987). Activity Theory. En Bishop, A. (Ed.). *The politics of Mathematics Education.* 18-76. La Haya, Holanda: Reidel.

Mendiola, E. (1988). *Matemática 8vo grado de E. B.* Caracas, Venezuela: Biósfera.

Miller, G. A. y Gildea P. M. (1987). How children learn words. *Scientific American* 257(3), [86-91].

Minick, N. (1986). The early history of the Vygotsky school: the relation between Mind and Activity. *The Quarterly Newsletter of the laboratory of comparative human cognition.* Vol 8 (4). 119-124.

Ministerio de Educación.(1990). *Programa de Articulación del nivel de Educación Media, Diversificada y Profesional.* Asignatura Matemática. Primero y segundo año. Caracas, Venezuela: Autor

Ministerio de Educación. (1987). *Programa de Estudio y Manual del Docente. Tercera Etapa. Educación Básica. Asignatura: Matemática – Física.* Caracas, Venezuela: Autor.

Moliner, M. (2000). *Diccionario de uso del español.* Madrid, España: Gredos.

Moll, L.C. (1993). *Vigotsky y la Educación*. Buenos Aires, Argentina: Ateneo.

Montezuma, A., Rada, S., Rodríguez, J. y Fontcuberta, M. (1995). *Matemática 2000 8vo grado.* Caracas, Venezuela: Mc Graw-Hill.

Montezuma, A., y Rodríguez, J. (1997). *Problemario de fácil dominio para Matemática 8vo grado.* Caracas, Venezuela: Mc Graw-Hill.

Mora, D. (1998). *Probleme des Mathematikunterrichts in lateinamerikanischen Ländern -explorative empirische Studie zur Entwicklung didaktischer und curricularer Innovationsansätze im Kontext der Educación Popular am Beispiel Nicaragua und Venezuela*. Hamburgo, Alemania: Universidad de Hamburgo. Disponible en la dirección (en línea): http://www.sub.uni-hamburg.de/disse/05.

Mora, D. (2001a). Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática Enfocada en las Aplicaciones. *Enseñanza de la Matemática*. Volumen 10. 1:3-22.

Mora, D. (2001b). *Metodología para el metanálisis de trabajos especiales de grados y de postgrados.* (Mimeografiado). Caracas, Venezuela: Universidad Central de Venezuela.

Mora, D. (2002a). *Aspectos pedagógicos y didácticos sobre el método de proyectos. Un modelo para su aplicación en educación matemática.* Mimeografiado. Caracas: Universidad Central de Venezuela.

Mora, D. (2002b). *Didáctica de las Matemáticas*. Caracas, Venezuela: Universidad Central de Venezuela.

Mora, D. (2004b). Transformación educativa desde la perspectiva: trabajo, estudio, reflexión política e investigación. En: David Mora y Rolf Oberliesen. *Trabajo y educación: Jóvenes con futuro. Ideas educativas y praxis sobre el currículo, la escuela, el aprendizaje, la enseñanza, la formación docente en un contexto internacional*. La Paz, Bolivia: Campo Iris, [13-78].

Mora, D. (2008). Teoría y método de la investigación acción participativa en Ciencias Sociales, Naturales, Pedagogía y Didáctica. En Mora, D., González, J. y Unzueta, S, (Coordinadores). *Metodología de investigación cualitativa e investigación acción participativa. Concepciones teórico.prácticas para fortalecer la investigación cooperativa y colaborativa en América Latina y el Caribe*. La Paz, Bolivia: Instituto Internacional de Integración del Convenio Andrés Bello.

Morín, E. (1994). *Iniciación al pensamiento complejo.* Barcelona, España: Gedisa.

Morín, M. (1998). *Metodología de la Investigación.* Los Teques, Venezuela: Moisés Sandoval.

Morris, K. (2000). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades.* México, México: Fondo de Cultura Económica.

Movshovitz-Hadar, N., Inbar. S. y Zaslavsky, O. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 18: [3-14].

Mulhern, G. (1989). Between the eras: Making inferences about internal proceses. En Creer, B. y Mulhern, G. (Eds). *New Directios in Mathematics Educatios*. Londres, Inglaterra: Routledge.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation standards for school mathematics.* Reston, Estados Unidos: Autor.

Newmann, J. (1976). *El mundo de las matemáticas.* Barcelona, España: Grijalbo.

Newton, I. (1977). *Principios matemáticos de filosofía natural*. Caracas, Venezuela: Universidad Central de Venezuela

Nieto, J. (1993). Problemas y soluciones. *Divulgaciones matemáticas*. 1(1).

Niss, M. (1995). Las matemáticas en la sociedad. *Uno*, 6: [45-57].

Ñilo, S. (1975). Temas de evaluación. *Revista Tecnología Educativa*. Vol 1. Nº 3.

Odremán, N. (1997). *Segunda Jornada Nacional de Consulta. Primera y Segunda Etapa.* Trabajo de Maestría. Caracas, Venezuela: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Orville, H., Bradfield, J. y Odell, W. (1967). *La enseñanza en la escuela secundaria.* Buenos Aires, Argentina: El Ateneo.

Pardinas, F. (1978). *Metodología y técnicas de investigación en Ciencias Sociales.* México, México: Siglo XXI.

Perales, F. (2000). *Resolución de problemas.* Madrid, España: Síntesis.

Perales, F. y Cervantes, A. (1984). Influencia del conocimiento del resultado numérico en la resolución de problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, 3: 211-219

Perret - Clermont, A., Perret, J & Bell, N. (1991). The social construction of meaning and Cognitive activity in elementary school children. En L..Resnick,, J. Levine. & s. Teasley, (Eds.). *Perspectives on socially Sharen cognition.* Washington, Estados Unidos: American Psychological Association.

Pérez, R. (1994). La cultura escolar en la sociedad posmoderna. *Cuadernos de Pedagogía,* 225:80-85.

Piaget, J. (1970). *Educación e instrucción*. Buenos Aires, Argentina: Proteo.

Piaget, J. (1978). *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid, España: Morata.

Piaget, J. (1981). *La representación del mundo en el niño*. Madrid, España: Morata

Piaget, J. e Inhelder, B. (1972**).** *Memoria e inteligencia*. Buenos Aires, Argentina: Ateneo.

Planas, N. , Vilella, X. y Gorgorio, N. (1999). ¿Dónde hay matemáticas? *Cuadernos de Pedagogía.* 281: 25-29. Barcelona, España: Praxis

Poblete, A. y Díaz, V. (1998). *Categorías en la resolución de problemas matemáticos.* Memorias. III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Caracas, Venezuela: Universidad Central de Venezuela.

Pola A. (1993). *Matemáticas en Sondeos y Sistemas Electorales.* Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza.

Pol, J. (1991). Vivir la trigonometría. *Cuadernos de Pedagogía*. 196: 50-51. Barcelona, España: Fontalba

Polya, G. (1945). *How to solve it*. New Jersey, Estados Unidos: Princeton University Press.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Tecnos.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery-on understanding, learning and teaching problem solving.* Vol. I y II. Nueva York, Estados Unidos: John Wiley & Sons.

Pomés, J. (1991). La metodología de resolución de problemas y el desarrollo cognitivo: un punto de vista de vista postpiagetiano. *Enseñanza de las ciencias*. 9(1): 78-82.

Punto, M. y Gálvez, C. (1996). *Análisis Documental de Contenido*. Madrid, España: Síntesis.

Qüenza, S. (1972). *Manual sobre elaboración de libros de texto.* Turmero, Venezuela: Centro de Capacitación Docente El Mácaro.

Quino. (1989). *Potentes, prepotentes e impotentes*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones de la flor.

Radatz, H. (1980). Students' errors in the Mathematical Learning Process: a Survey. *For the Learning of Mathematics.* 1 (1): [16-20].

Ralph, L. (1961). *Phythagoras: a short Account of his Life Philosophy.* Manchester, Inglaterra: Krikos.

Reverand, E. (2002). Teoría de la actividad. En Mora, D. (Ed.). *Tópicos de Educación Matemática.* Caracas, Venezuela: Universidad Central de Venezuela.

Reverand, E. (2003). *Niveles de comprensión matemática en educación básica*. Tesis doctoral no publicada. Caracas, Venezuela: Universidad Central de Venezuela.

Rico Romero, L. (1997a). Reflexiones sobre los fines de la educación matemática. *Suma*, 24: [5-20].

Rico Romero, L. (1997b). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria.* Madrid, España: Síntesis

Rogoff, B. (1981). Social interaction as apprenticeship in thinking: Perspectives on socially guidance and spatial Planning. En L. Resnick,, J. Levione. y S. Teasley. (Eds.). *Perspective on sociality shared cognition.* 349 – 364. Washington, Estados Unidos: American Psychological Association

Rogoff, B. (1993). *Aprendices del pensamiento.* Barcelona, España: Paidós.

Rojas Olaya, A. (2008a). Pensamiento pedagógico de Simón Rodríguez. En *Espacios y perspectivas.* Julio-agosto-septiembre. N° 22. [26-32]. Caracas, Venezuela: Fondo Editorial Ipasme.

Rojas Olaya, A. (2008b). La investigación cualitativa: aspectos fundamentales de la investigación acción, investigación acción participativa y estudio de caso. En Mora, D., González, J. y Unzueta, S, (Coordinadores). *Metodología de investigación cualitativa e investigación acción participativa. Concepciones teórico.prácticas para fortalecer la investigación cooperativa y colaborativa en América Latina y el Caribe*. La Paz, Bolivia: Instituto Internacional de Integración del Convenio Andrés Bello.

Romberg, T. (1992). Perspectives on Scholarship and Research Methods. En Grouws (Ed). *Handbook of research on Mathematics teaching and Learning.* Nueva Cork, Estados Unidos: Macmillan.

Rubilar Solís, L. *El constructivismo socio-cultural.* Documentos de apoyo a la docencia.<www.umce.cl/facultades/filosofia/pedagógica/dad_psicología_educacional_i3.html> [05 julio 2002]

Sacristán, G. (1999). **Currículo**. Madrid, España: Morata.

Sacristán, G. (2000). **Contra los objetivos**. Madrid, España: Morata.

Salazar, J. y Rojas, J. (19XX). *Matemática. Educación Básica 7mo grado.* Caracas, Venezuela: Romor.

Salett Biembengut, M. y Hein, N. (1999). Modelación matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas. Educación Matemática. 11(1):119-134.

Salvat. (1964). *Enciclopedia Salvat de la Ciencia y de la Tecnología.* Barcelona, España: Autor.

Santillana. (1997). *Matemática 7mo grado.* Caracas, Venezuela: Autor.

Segura, C. (1991).La medida del tiempo. *Cuadernos de pedagogía*. 192: [32-34]. Barcelona, España: Fontalba.

Serres, Y. (2000). Cognición y Metacognición en el Proceso de Solución de Problemas Matemáticos. *Enseñanza de la Matemática*. Vol. 9. 1: [31-34].

Schliemann, A. y Acioly, N. (1989). Mathematical knowledge developed at work: The Contribution of practice versus the contribution of the schooling. *Cognition and Instruction.* Vol. 6. (3): [185 – 221].

Schwille, J., Porter, A., Belli, G., Floden, R. Freeman, D. Knappen, L., Kuhs, T., y Schmidt, W. (1983). Teachers as policy brokers in the content of elementary school mathematics. In L. Shulman y G. Sykes (Eds.). *Handbook of teaching and policy*. Nueva York, Estados Unidos: Longman. [370-391]

Scribner, S. (1984). Studyng working intelligence. En B. Rogoff & J. Lave. (Eds.). *Everyday Cognition: its development in social context.* (9 – 40).

Scribner, S. (1992). Mind in action: A functional approach to the study of mind. En E. Tobach, R. Joffe, M. Parlee, L. Martìn. & A. Scribner. (Eds.) *Mind and social practice*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Scribner, S. y Beach, K. (1993). An activity theory approach to memory. *Applied Cognitive Psychology*. Vol. 7.

Short, K. y Schroeder (1999). *El aprendizaje a través de la indagación: docentes y alumnos diseñan juntos el currículo.* Barcelona, España: Gedisa.

Shvidanenko, A. y Quiñónez, H. (1984). Algunas cuestiones sobre la enseñanza de la matemática. *Revista cubana de educación superior*. Vol4. Nº 4: 61-71.

Siguán. M. (1987). *Actualidad de Lev S. Vigotsky.* Barcelona, España: Arthropos.

Singh, S. (2000). *El enigma de Fermat.* Barcelona, España: Planeta.

Steen, L. (2000). *La enseñanza agradable de las matemáticas.* México, México: Limusa.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Nueva York, Estados Unidos: Academic Press.

Schwarz, W. (2002). *Cómo promover el éxito de los niños y las minorías en las ciencias y en las matemáticas*. [Documento en línea]. ERIC clearinghouse on urban education. Guía para padres. <http://eric-web.tc.columbia.edu/guides/pg8-shtml> [28 febrero 2002]

Schwille, J., Porter, A., Belli, G., Floden, R., Freeman, D. Kappen, L.,Kuhs, T. y Schmidt, W. (1983). Teachers as policy brokers in the content of elementary school mathematics. En Stodolsky, S. (1991). *La importancia del contenido en la enseñanza. Actividades en las clases de matemáticas y ciencias sociales.* Barcelona, España: Paidós.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la Educación Matemática crítica.* Bogotá, Colombia. Una empresa docente Universidad de los Andes.

Steen, L.A. (2001). *La enseñanza agradable de las matemáticas.* México, México: Limusa.

Stenhouse, L. (1987). *La investigación como base de la enseñanza.* Madrid, España: Morata.

Stigler, J. y Stevenson, H. (1991). How Asian teachers polish each lesson to perfection. *American Educator*, 15(1): 12-20,43-47.

Stodolsky, S. (1991). *La importancia del contenido en la enseñanza. Actividades en las clases de matemáticas y ciencias sociales.* Barcelona, España: Paidós.

Stolum, H. (1996). River meandering as a self-organization progress. *Science*. 271:1710-1713.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematical Education. A paradigm of developmental research.* Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Tann, C. (1993). *Diseño y desarrollo de unidades didácticas en la enseñanza primaria.* Madrid, España: Morata.

Tolman, Ch. (1999). Society versus context in individual development: does theory make a difference. En Engeström Y., Miettinen R. Y Punamäki R. (Eds.).

Perspectives on Activity Theory. 1-18. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Torres, J. (1994). *Globalización e interdisciplinariedad, el curriculum integrado.* Madrid, España: Morata.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions, A Model of Goal and Theory Decription in Mathematics Education*. Dordrecht, Holanda: Reidel.

Uribe, J. y Berrío, I. (1999). *Matemática Constructiva 7mo grado.* Caracas, Venezuela: Edinova.

Valarino, E. (1997). *Tesis a tiempo.* Caracas, Venezuela: Equinoccio.

Valiente, S. (2000). *Didáctica de la matemática. El libro de los recursos.* Madrid, España: La muralla.

Valles, C. y Jareno, J. (1992). La maleta de problemas. *Cuadernos de pedagogía*. 202: 14-17. Barcelona, España: Fontalba.

Van Dalen, D. y Meyer, W. (1981). *Manual de técnica de la investigación educacional.* Barcelona, España: Paidós.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1993). A decade of research on word problem solving in leuven: theoretical, methodological and practical outcomes. *Psychology Educational Review.* Vol. 5 (3). 239-256.

Vidaurre, C. (1995). *Yo... Maestro.* Caracas, Venezuela: Trípode.

Vigotsky, L. (1925). *La psicología del arte*. Cambridge, Inglaterra: MIT Press.

Vigotsky, L. (1977). *Pensamiento y lenguaje.* Buenos Aires, Argentina: La pléyade.

Vigotsky, L. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes.* Massachusetts, Estados Unidos: Harvard University Press.

Villar, A. (1998). *Matemáticas y Realidad.* Memorias. III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Caracas, Venezuela: Universidad Central de Venezuela.

Von Mises, R. (1969). Los postulados matemáticos y el entendimiento humano. En Newman (Ed). *Matemática, verdad, realidad.* Barcelona, España: Grijalbo

Waldegg, G. (1998). *Principios Constructivistas para la Educación Matemática.* Memorias. III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Caracas, Venezuela: Universidad Central de Venezuela.

Werner, H. (1996). ¿Cuántas matemáticas precisa el hombre? *Ciencia y Educación* 1.

Wertsch, J. (1981). Concept of activity in Soviet Psychology. Nueva York, Estados Unidos: Armonk.

Wertsch, J. (1985). *Culture, communication and cognition.* Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Wertsch, J. (1988). *Vigotsky y la formación social de la mente.* Madrid, España: Paidós.

Wertsch, J. (1991). *Las voces de la mente.* Madrid, España: Visor.

Wheatley, G. (1992). The role of reflection in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 23: [529-541].

Whitehead, A. N. (1929). *The Aims of Education and Other Essays.* Nueva York, Estados Unidos: Macmillan.

Whitty, G. (1986). **Sociology and school knowledge**. Londres, Inglaterra: Methuen.

Young, R. (1993). **Teoría crítica de la educación y discurso en el aula**. Barcelona, España: Paidós.

Zabala, A. (1995). *La práctica educativa: cómo enseñar.* Barcelona, España: Grao.

Zinchenko, V. y Gordon, V. (1981). Methodological Problems in the psychologycal analysis of activity. En Wertsch (Ed.). *Concept of activity in Soviet Psychology*.72-133. Nueva York, Estados Unidos: Armonk.

Índice

Colección **Moral y Luces / Simón Rodríguez**

La Colección "Moral y Luces / Simón Rodríguez" es el recinto editorial para la difusión de obras didácticas y pedagógicas que faciliten el día a día de quienes ejercen el magisterio. El Fondo Editorial del Instituto de Previsión y Asistencia Social del Ministerio del Poder Popular para la Educación (IPASME), ofrece esta colección a todas las conciencias de profesoras y profesores para que tengan las herramientas teóricas, intelectuales y conceptuales necesarias, para crear en los niños, niñas y jóvenes, la posibilidad de desarrollar una visión nueva, flexible, reflexiva y humanista del mundo, de la sociedad y del pensamiento. La colección lleva dos nombres. El primero, "Moral y Luces", recoge el famoso pensamiento del Libertador Simón Bolívar síntesis de su visión político y educativa "Moral y Luces son los polos de una República, moral y luces son nuestras primeras nesecidades". El segundo, "Simón Rodríguez", el más importante pedagogo latinoamericano del siglo XIX, quien no sólo habló de socialismo antes que Marx; sino que luchó hasta sus 83 años de edad en contra del pensamiento colonialista y habló de la necesidad de crear en estas latitudes un hombre nuevo para un mundo nuevo.

SOBRE EL LIBRO:

El libro Matemática y Realidad es el resultado de una investigación realizada entre 1999 y 2002 en la cual los autores hacen una revisión crítica de la forma de enseñar la Matemática hasta el noveno grado de la Educación Básica. Ellos proponen una metodología para enseñar dicha asignatura, distinta a la acostumbrada, introduciendo el método de proyectos, a través del cual se forme en la alumna y en el alumno un pensamiento matemático que le ayude a entender, interpretar y desenvolverse en su entorno y en la vida.

IPASME

GIDEM